Fuzzy/C論理関数の数を評価するための一手法

5AH－8

巽　久行[†]，　荒木　智行[†]，　向殿　政男[††]，　徳増　眞司[†]
† 神奈川工科大学　　†† 明治大学

1．はじめに

あいまいさを取り扱うのに適した論理関数として，定数係数を持ったファジィ論理関数（以下Fuzzy/C論理関数と呼ぶ）が提案されている。本報告はFuzzy/C論理関数の基本的性質，特に一意に表現できる標準形をもとに数の限界式を考察したので，これについて報告する。

2．基本的性質

変数 x_i $(1 \le i \le n)$ と定数 c_k $(1 \le k \le \ell)$，および論理演算 AND$(\cdot)$, OR$(\vee)$, NOT$(\sim)$ との有限回の結合により構成される式を論理式という。

［定義１］　変数 x_i および定数 c_k が閉区間 $[0,1]$ の値をとり，論理演算 $\cdot, \vee, \sim$ をそれぞれ，$x_i \cdot x_j = \min(x_i, x_j)$, $x_i \vee x_j = \max(x_i, x_j)$, $\sim x_i = 1 - x_i$ と定義すると，論理式は定数係数を持った n 変数ファジィ論理関数（以下，Fuzzy/C論理関数と記す）と呼ばれる $[0,1]^n$ から $[0,1]$ への関数を表現する。　□

集合 $\{0,1/2,1\}$ およびこの集合の n 個の直積 $\{0,1/2,1\}^n$（以下これを V と記す）の間に半順序関係 $\prec$ を定義する。

［定義２］　a, b を $\{0,1/2,1\}$ の元とするとき，

$a \prec b \Leftrightarrow a \le b \le 1/2$ または $1/2 \le b \le a$。

$\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, \cdots, b_n)$ を V の元とするとき，

$\mathbf{a} \prec \mathbf{b} \Leftrightarrow \forall i\,;\, a_i \prec b_i$。　□

集合 $\mathrm{V}(= \{0,1/2,1\}^n)$ のうち，０または１の個数が k 個からなる部分集合をランク k の集合と呼び，V_k と記す。

積項（和項）のうち，ある変数について肯定 x_i，否定 $\sim x_i$ とが同時に存在しないような幾つかの文字の AND（OR）を単積項（単和項）という。特に，定数 c_k と単積項（単和項）とを AND（OR）で結合したものを定数付き単積項（定数付き単和項）という。ここで，V と単積項（単和項）との間に，次のような対応を定義する。

［定義３］　$\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_n)$ を V の元とする。このとき $\mathbf{a}$ と単積項 $\alpha = x_1^{a_1} \cdot \cdots \cdot x_n^{a_n}$（単和項 $\beta = x_1^{a_1} \vee \cdots \vee x_n^{a_n}$）とは，次のとき互いに対応しているという。

$$a_i = \begin{cases} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x_i^{a_i} = \begin{cases} x_i \ (\sim x_i) \\ 1 \\ \sim x_i \ (x_i) \end{cases}$$

また，$\mathbf{a}$ と定数付き単積項 $\alpha = c_k \cdot x_1^{a_1} \cdot \cdots \cdot x_n^{a_n}$（定数付き単和項 $\beta = c_k \vee x_1^{a_1} \vee \cdots \vee x_n^{a_n}$）との対応も，定数以外については上記の通りで，定数 c_k を明示したいときには対応する V の元を $\mathbf{a}^{(c_k)}$ と記し，これを $\mathrm{V}^{(c_k)}$ の元と呼ぶことにする。　□

［定義４］　Fuzzy/C論理関数 $F(\in \mathbf{FC})$ を表現している論理式に現れる定数が c_k $(1 \le k \le \ell)$ であるとき，

$R_0(F) = \{0,1/2,1\} \cup \{c_1, \cdots, c_\ell\} \cup \{1-c_1, \cdots, 1-c_\ell\}$

なる集合 $R_0(F)$ を，F の基底集合と呼ぶ。　□

以下便宜上，基底集合を

$R_0(F) = \{c_0, c_1, c_2, \cdots, c_\ell, c_{\ell+1}, \bar{c}_\ell, \cdots, \bar{c}_2, \bar{c}_1, \bar{c}_0\}$（但し，$c_0 = 0$, $c_{\ell+1} = 1/2$, $0 \le c_i < 1/2$, $c_i < c_{i+1}$ とし，$1 - c_i$ を $\bar{c}_i$ とおく。これより $\bar{c}_0 = 1$, $1 \ge \bar{c}_i > 1/2$，$\bar{c}_i > \bar{c}_{i+1}$，但し $(i = 0, 1, \cdots, \ell)$）とする。

基底集合の元 $c_r(\in R_0(F))$ が，$c_r > 1/2$ となる部分集合は $\{\bar{c}_\ell, \cdots, \bar{c}_1, \bar{c}_0\}$（これを基底上半集合と呼ぶ）であり，$c_r < 1/2$ となる部分集合は $\{c_0, c_1, \cdots, c_\ell\}$（これを基底下半集合と呼ぶ）であり，どちらも $(|R_0(F)|-1)/2$ 個（これを p とする）である。

ここで，基底集合に関して次の定理が成り立つ。

［定理１］[1]　任意の n 変数Fuzzy/C論理関数 $F(\in \mathbf{FC})$ において，論理式に現れる定数係数集合は基底集合 $R_0(F)$ に等しく，その濃度(個数)は 3^n 個を越えない。(証明略)□

任意の n 変数Fuzzy/C論理関数 $F(\in \mathbf{FC})$ に対して，基底集合 $R_0(F)$ の元 c_r に写像される V の元の部分集合を $F^{-1}(c_r)\left(\subset \mathrm{V}^{(c_r)}\right)$ で表し，これを $c_r - set$ と呼ぶことにする。ここで，n 変数Fuzzy/C論理関数の標準形として，次の定理が成り立つ。

［定理２］[1]　任意の n 変数Fuzzy/C論理関数 $F(\in \mathbf{FC})$ は，

$F = F_{P1} \vee (1/2) \cdot F_{C1}$

なる論理式で（項の順番を無視して）一意に表現できる。ここで，F_{P1} は基底上半集合に含まれる各 $c_r - set$ のすべての極大元に対応する定数付き単積項の和，F_{C1} は基底下半集合に含まれる各 $c_r - set$ のすべての極大元に対応する定数付き単和項の積である。　(証明略)□

3．数え上げに関する諸性質

任意の n 変数Fuzzy/C論理関数 $F(\in \mathbf{FC})$ において，F の入力を B^n の元（但し $\mathrm{B} = \{0,1\}$）に限ったとき，その $c_r - set$（但し $c_r \in R_0(F)$）は B^n の部分集合となり，F に対して一意に定まる。以下便宜上，n 変数 a 値入力 b 値出力論理関数を，n 変数 (a,b) 論理関数と記す。

［定義５］　n 変数Fuzzy/C論理関数 F の，B^n 上の $c_r - set$（但し $c_r \in R_0(F)$）と同じ値を取る n 変数 $(2, |R_0(F)|)$ 論理関数を F_{c_r} とする。このとき，n 変数Fuzzy/C論理関数 F と n 変数 $(2, |R_0(F)|)$ 論理関数 F_{c_r} とは，互いに c_r - equivalent であるという。　□

一般に，F_{c_r} に c_r - equivalent な n 変数Fuzzy/C論理関数は有限であるが数多く存在する。n 変数 $(2, |R_0(F)|)$ 論理関数 F_{c_r} において，B^n 上の $c_r > 1/2$ なる $c_r - set$ で

A Method for Estimating on the Number of Fuzzy/C Switching Functions.

Hisayuki Tatsumi*, Tomoyuki Araki*,
Masao Mukaidono**, Shinji Tokumasu*,
* Kanagawa Institute of Technology
** Meiji University

c_r，他では0を取るn変数$(2,p+1)$論理関数をF_p，同様にB^n上の$c_r<1/2$なるc_r-setでc_r，他では1を取るn変数$(2,p+1)$論理関数をF_cとする。ここでF_pおよび$\sim F_c$のすべての定数付き加法形式の集合の数をそれぞれ$|DF_{(c_r)}(F_p)|$および$|DF_{(c_r)}(\sim F_c)|$とすると，n変数$(2,|R_0(F)|)$論理関数F_{c_r}にc_r-equivalentなn変数Fuzzy/C論理関数の集合の数$|c_r\text{-eq}(F_{c_r})|$に関して，次の定理が成り立つ。

[定理3] $|c_r\text{-eq}(F_{c_r})|=|DF_{(c_r)}(F_p)|\times|DF_{(c_r)}(\sim F_c)|$ (証明略)□

4. 数の上界および下界

4.1 上界

B^n上のc_r-setにおいて，$R_0(F)$の基底上半集合$\{\bar{c}_\ell,\cdots,\bar{c}_1,\bar{c}_0(=1)\}$を考える。いま，各$\bar{c}_i(i=0,1,\cdots,\ell)$について，$\bar{c}_i\le c_r$なる$c_r-set$で1，他では0となる2値論理関数を$f_{\bar{c}_i}$と記すと，$f_{\bar{c}_0}\subset f_{\bar{c}_1}\subset\cdots\subset f_{\bar{c}_\ell}$となる。

同様にB^n上のc_r-setにおいて，基底下半集合$\{c_0(=0),c_1,\cdots,c_\ell\}$を考える。いま，各$c_i(i=0,1,\cdots,\ell)$について，$c_i\ge c_r$なる$c_r-set$で0，他では1となる2値論理関数を$f_{c_i}$と記すと，$f_{c_0}\supset f_{c_1}\supset\cdots\supset f_{c_\ell}$となる。

任意の2値論理関数fのすべての加法形式の集合の数を$|DF(f)|$と記すと，定理3より次の不等式が成立する。

$$|c_r\text{-eq}(F_{c_r})|<\prod_{i=0}^{\ell}\left\{|DF(f_{\bar{c}_i})|\times|DF(\sim f_{c_i})|\right\}$$
$$<\prod_{i=0}^{\ell}|DF(1)|<(|DF(1)|)^{(3^n-1)/2}$$

以上より，c_r-equivalentなFuzzy/C論理関数の数の上界は，2値定数論理関数1を表現する加法形式の数を求める問題に帰着された。

[定義6] 集合Vの部分集合Sが全順序集合であるとき，Sは鎖であるといい，$|S|$を鎖の長さと呼ぶ。また集合Sにおいてどの2つの元も比較不可能なとき，Sは反鎖であるといい，$|S|$を反鎖の大きさと呼ぶ。□

2値定数論理関数1を表現する加法形式の集合DF(1)の数は，半順序集合Vの反鎖の数に等しいことが簡単に示される。また半順序集合Vの最大の反鎖の大きさは$2^r\binom{n}{r}$（但しランク$r=\lceil 2n/3\rceil$であり，以降簡単のために$r=2n/3$とする）であるので，ディルウォースの定理よりVは$2^r\binom{n}{r}$個の鎖に分解できる。このとき各鎖の長さが高々$n/\sqrt{3}$であれば，各鎖の中から元を高々1個選ぶことにより，集合Vの全ての反鎖を生成することができるので，集合DF(1)の数$|DF(1)|$に関して

$$|DF(1)|<\left(\frac{n}{\sqrt{3}}\right)^{2^r\binom{n}{r}}$$

が成立する。よってFuzzy/C論理関数の集合の数$|\mathbf{FC}|$は，

$$|\mathbf{FC}|=\sum_{c_r}|c_r\text{-eq}(F_{c_r})|<\sum_{c_r}(|DF(1)|)^{(3^n-1)/2}$$

となるので，数の上界として

$$|\mathbf{FC}|<3^{2^n}\cdot\left(\left(\frac{n}{\sqrt{3}}\right)^{2^r\binom{n}{r}}\right)^{(3^n-1)/2}$$

を得る。この式をスターリングの近似公式で展開すると，

$|\mathbf{FC}|<2^{\alpha}$，但し

$$\alpha=3^{2n}\left(\left(\frac{2}{9}\right)^n log_2 3+\frac{3}{4\sqrt{\pi n}}\left(1+\frac{c}{n}\right)log_2\frac{n}{\sqrt{3}}\right)$$

となる（式中のcは適当な定数で押さえられる）。

4.2 下界

Vから作られる1つの定数付き反鎖$\{\mathbf{a}_1^{(\bar{c}_1)},\cdots,\mathbf{a}_s^{(\bar{c}_s)}\}$は1つの定数付き加法形式$\bar{c}_1\cdot\alpha_1\vee\cdots\vee\bar{c}_s\cdot\alpha_s$に対応する。半順序集合Vの2つの隣接するランク$k$の集合$V_k$とランク$k-1$の集合$V_{k-1}$において，$V_k$の各元は$V_{k-1}$の$k$個の元に包含されている。よって$V_k$の$s$個の元は，多くとも$ks$個の$V_{k-1}$の元に包含される。これより$V_{k-1}$の残りの$|V_{k-1}|-ks$個の元は，2つの隣接した集合の中では互いに包含関係にないので，これから作られる部分集合はすべてVの反鎖となる。これよりVの反鎖から求められる可能な定数付き反鎖の数を求めると，V_kのs個の各元に対してp通り（但し$p\le(3^n-1)/2$）の定数を選ぶことができ，V_{k-1}の残りの$|V_{k-1}|-ks$個の各元に対して選ばない場合も含めて$p+1$通りの中から部分集合（即ち定数付き反鎖）を作ることができるので，

$$\sum_{s=0}^{|V_k|}\binom{|V_k|}{s}p^s\cdot(p+1)^{|V_{k-1}|-ks}$$

を得る。これはn変数Fuzzy/C論理関数の数$|\mathbf{FC}|$の下界を与える。上式を不等号を考慮して変形すると，

$$|\mathbf{FC}|>p^{|V_{k-1}|}\cdot\sum_{s=0}^{|V_k|}\binom{|V_k|}{s}p^{-(k-1)s}=p^{|V_{k-1}|}\cdot e_{k-1}^{\frac{|V_k|}{p^{k-1}}}$$

となる。但し変形に際して，$e_{k-1}=\left(1+p^{-(k-1)}\right)^{p^{k-1}}$とおいた。いまランク$k$として，$k-1$を$r(=2n/3)$にとり，$n\to\infty$になるほど，$e_{k-1}\to e$（$e$は自然対数の底）および$|V_{r+1}|\approx|V_r|\left(=2^r\binom{n}{r}\right)$と近似できるので，

$$|\mathbf{FC}|>p^{|V_r|}\cdot e^{\frac{|V_r|}{p^r}}>p^{|V_r|}$$

を得る。この式をスターリングの近似公式で展開すると，

$$|\mathbf{FC}|>2^{\beta},\ \text{但し}\ \beta=3^n\left\{\frac{3}{2\sqrt{\pi n}}\left(1+\frac{c}{n}\right)log_2 p\right\}$$

となる（式中のcは適当な定数で押さえられる）。

5. むすび

本報告では，n変数Fuzzy/C論理関数の数の上界および下界を求めた。導出のもとになる方法は現在のところ，本手法が最も良いものであると自負しているが，限界式のオーダーには大いに改善の余地がある。

参考文献

[1] 荒木，巽，向殿，荒川：定数係数を持ったファジィ論理関数の基本的性質(1)－未知,矛盾,不明－,第13回ファジィシステムシンポジウム,1997.6.