5ＡＨ－７

初等的でないフレームを持つ様相論理の統一化による証明法

友石 正彦　萩原 茂樹　米崎 直樹
東京工業大学情報理工学研究科計算工学専攻

1 はじめに

本研究では、フレームのクラスが一階の制約で特徴づけられない体系 KM に対して分解証明法を定義する。公理 M は時系列モデルが終了状態に到達することを表しており、デッドロックがないこと証明するのに利用することができる。

このために、まず、一階の制約でフレームが特徴づけられる体系に対する様相記号列の統一化による分解証明法を構成する。これまでも、Until を持つ論理について公理系に基づいて規則を定義するもの [4] や、□に支配されるの選言肢、◇に支配される連言肢を展開しない形の節形式を用いるもの [1][2] が提案されているが、本研究では、様相記号へのラベリングに対して意味論を記述する一階の言語におけるスコーレム化と対応をとることで、節がラベルづけられた様相記号列を prefix とするリテラルの選言肢となる節形式を導入する。これにより、これまでに述語論理などの分解証明法において研究されてきた戦略を様相論理の分解証明法に導入する際の見通しがよくなるだけでなく、証明の途中で選言、連言を展開する必要がなく、証明が分解規則によるステップのみとなるため証明の流れが見やすい。

次に、一階の言語におけるスコーレム化と対応できない KM の場合について分解証明法を拡張する。

2 様相論理

命題変数は式とする。f, g が式のとき、$\neg f, f \wedge g$, $\Box f$ は式とする $\rightarrow, \vee, \Diamond$ を省略形として用いる。

W を世界の集合、R を W 上の関係を表す述語、m を命題変数に W の部分集合を割り当てる関数とするとき、フレームを $\langle \mathrm{W}, R\rangle$、モデルを $\langle\langle \mathrm{W}, R\rangle, \mathrm{m}\rangle$ とする。

各論理体系のフレームは以下のような制約を満たす：

体系	フレームの性質	制約
K		なし
T	反射	$\forall x\,(R_{xx})$
4	推移	$\forall xyz\,(R_{xy} \wedge R_{yz} \rightarrow R_{xz})$
B	対称	$\forall xy\,(R_{xy} \rightarrow R_{yx})$
5	ユークリッド	$\forall xyz\,(R_{xy} \wedge R_{xz} \rightarrow R_{zy})$
D	継続	$\forall x \exists y\,(R_{xy})$

モデル $\mathbf{M} = \langle\langle \mathrm{W}, R\rangle, \mathrm{m}\rangle$ の $w \in \mathrm{W}$ における式 f の評価を $\overset{\mathbf{M}}{\underset{w}{}}\models f$ と表し、以下のように定義する：

$$\overset{\mathbf{M}}{\underset{w}{}}\models p \Leftrightarrow w \in \mathrm{m}(p),\quad \overset{\mathbf{M}}{\underset{w}{}}\models f \wedge g \Leftrightarrow \overset{\mathbf{M}}{\underset{w}{}}\models f \wedge \overset{\mathbf{M}}{\underset{w}{}}\models g,$$
$$\overset{\mathbf{M}}{\underset{w}{}}\models \neg f \Leftrightarrow \overset{\mathbf{M}}{\underset{w}{}}\not\models f,\quad \overset{\mathbf{M}}{\underset{w}{}}\models \Box f \Leftrightarrow \forall v\{R_{wv} \rightarrow \overset{\mathbf{M}}{\underset{v}{}}\models f\}$$

(p は命題変数)

3 節形式の導入

すべての命題変数 p ついて $w \in \mathrm{m}(p)$ と同じ真偽をとる述語 $P(w)$ を持つ一階の言語 $\mathcal{L}$ を考える。評価の定義式に従い、$\mathcal{L}$ における等価な式 $\mathcal{L}(f)$ を定義できる。すなわち、「f が S で充足不能 $\Leftrightarrow \mathcal{L}(f) \wedge$「$S$のフレームの制約」が充足不能」である。

このとき、$\mathcal{L}(f) \wedge$「Sのフレームの制約」のスコーレム化した後の式における変数、関数を利用して$\neg$を一番内側にいれた式の□, ◇にラベルづけを行なう（以後、そのようにラベルづけられた式を $L(f)$ と表す）。例えば、$\Box\Diamond\Diamond p$ に対しては、$\mathcal{L}(f)$ は $\forall x(R_{wx} \rightarrow \exists y(R_{xy} \wedge \exists z(R_{yz} \wedge P(z))))$ であり、スコーレム化すると、$R_{wx} \rightarrow (R_{xa(x)} \wedge R_{a(x)b(x)} \wedge P(b(x)))$ となる。このとき、$\Box_x\Diamond_a\Diamond_b p$ とラベルをふる。

ここでラベリングした式からスコーレム化した $\mathcal{L}$ の式への対応を考えると $\Diamond_a(p \wedge q)$ に対して

Unification in Modal Logic with non-elementary frames
Masahiko Tomoishi, Shigeki Hagihara, Naoki Yonezaki
Department of Computer Science, Tokyo Institute of Technology
2-12-1, Ookayama, Meguro-ku Tokyo 152, Japan

$R_{wa(w)} \wedge P(a(w)) \wedge Q(a(w))$、$\Diamond_a p \wedge \Diamond_a q$ に対して $R_{wa(w)} \wedge P(a(w)) \wedge R_{wa(w)} \wedge Q(a(w))$ となるので、反駁可能性は等しい。これにより、$L(f)$ はラベルづけられた様相記号列を prefix とするリテラルの選言肢を節とする節形式に変換することができる。

4 分解証明法

上で導入した節形式に対して、ラベルづけられた様相記号列の統一化による分解証明法を定義する。

様相記号列 $\underline{\alpha_1}, \underline{\alpha_2}$ が統一化可能であるとは、ある代入の集合 σ について $\underline{\alpha_1}^\sigma \cap \underline{\alpha_2}^\sigma$ が空でないことをいう。各体系における代入は以下の規則による：

体系	代入の型	体系	代入の型
K	$\Diamond_a / \Box_x$	T	$\emptyset / \Box_x$
4	$\Diamond_a \Diamond_{b_i}^+ / \Box_x$	5	$\Diamond_{a_i}^+ / \Diamond_{b_i}^+ \Box_x$
B	$\emptyset / \Diamond_a \Box_x$	D	$\Box_x / \Box_y$

体系 S4 であれば、K + T + 4 のようにフレームが満たす性質についての代入を組み合わせる。

分解規則は

$$\frac{\underline{\alpha_1} l \vee \Gamma_1 \quad \underline{\alpha_2} \neg l \vee \Gamma_2}{(\Gamma_1 \vee \Gamma_2)^\sigma} \qquad \frac{\underline{\alpha_1} f \vee \Gamma_1 \quad \underline{\alpha_2} g \vee \Gamma_2}{(\underline{\alpha_1} f \vee \Gamma_1 \vee \Gamma_2)^\sigma}$$

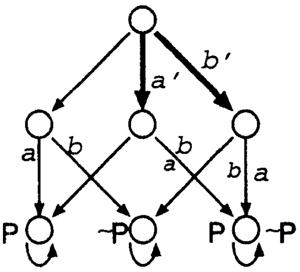
とする。$L(f)$ の節形式に分解規則を適用していき、空節が得られるならば $L(f)$ は反駁可能である。

Theorem 4.1 体系 S の代入規則を用いて $L(f)$ が反駁可能ならば、f は S で充足不能。

5 McKinsey Axiom

McKinsey Axiom M : $\Box\Diamond p \rightarrow \Diamond\Box p$ を含む体系 KM のフレームは、一階の言語による制約では特徴づけできない [3]。このため先に述べた方法では分解証明法が構成できない。そこで、公理から統一化のパターンを予想し、それを典型的なフレームと照らし合わせる。

M から $\{\Box_x \Diamond_a / \Box_y \Diamond_b\}$ が代入規則の候補として考えられるが、図のような KM の典型的なフレームにおいて考えてみると、$\{P, \neg P\}$ に a で到達する世界、b で到達する世界ともに 2 つあり、それぞれの場合で x と y を a', b' のどちらにすべきか一意に決まらない。よって代入規則による実現ではなく、節を新たに追加して実現する方法を考える。つまり、$\Box_x \Diamond_a f$ を含む節が存在するときには、その部分を $\Diamond_{a'} \Box_{x'} f$ で置き換えた節を追加する。このとき、a', x' はそれぞれ新しい関数記号、変数とする。例えば、$\{\Box_x \Diamond_a p, \Box_y \Diamond_b \neg p\}$ には $\Diamond_{a'} \Box_{x'} p$ と $\Diamond_{b'} \Box_{y'} p$ を追加する。このとき、$\Box_x \Diamond_a p$ と $\Diamond_{b'} \Box_{y'} p$、または、$\Box_y \Diamond_b \neg p$ と $\Diamond_{a'} \Box_{x'} p$ が統一化可能となる。



6 まとめ

本研究では、節形式を導入した様相記号列の統一化による分解証明法を提案した。節形式にすることでこれまで分解証明法において数多く研究されてきた戦略の導入などが可能になる。

さらに、フレームの制約が一階の言語で書けない体系 KM について分解証明法を適用する方法について検討した。M 以外にもフレームの制約が一階では書けない公理には W, N1 など計算機科学において有益な応用が考えられるものがあり、ここでの方法は、それらに対して分解証明法を導入していく上での基礎になると考えられる。

参考文献

[1] Abadi, M. and Manna, Z. Nonclausal Deduction in Fiirst-Order Temporal Logic, *JACM*, **37**, 2 (1987), 279–317.

[2] Enjalert, P. and Cerro, L. F. D. Modal Resolution in Clausal Form, *TCS*, **65** (1989), 1–33.

[3] Goldblatt, R. *Mathematics of modality*, No. 43 in CSLI Lecture Notes, CSLI Publications (1993), chapter 10, 231–241.

[4] 友石正彦, 米崎直樹 時相オペレータの統一化を用いる時相論理証明法, 第 9 回大会論文集日本ソフトウェア科学会 (1992).