5AH－5

強相関性原理を満たす決定可能な相関論理体系について

宮里 肇　程 京徳
九州大学大学院 システム情報科学研究科 情報工学専攻

1. はじめに

本論文では、相関論理体系 LR の論理定理のうち、強相関性原理を満たし、かつ決定可能な部分を明らかにするように相関論理体系 Rc を拡張する手法について述べる。

2. 相関論理

人間の論理的思考において中心的な役割を果たすのは、帰結関係と呼ばれるものである。古典数理論理では帰結関係を実質含意「→」を用いて表現する。実質含意は人間の論理的思考における帰結関係と本質的に異なるものであり、実質含意を帰結関係として用いると幾つかの点で違和感を感じることがある。実質含意のパラドクスという問題点は、人間の思考における推論を基準にすると奇妙で、妥当とは言えない帰結関係を、古典数理論理では正しいものと認めざるを得ないというものである[1]。

相関論理は、『A や B の真偽を知ることなく A⇒B の真偽を知ることが出来る』という Wright-Geach-Simply 基準に基づいて、帰結関係のより自然な形式化の為に構築された論理である[1]。このような論理体系として、Anderson や Belnap の体系 R や E などが最もよく知られている[1]。また、ある論理式が体系 R の中で証明可能かどうか（体系 R の論理定理であるかどうか）判別する事は決定可能ではないが、体系 R の公理図式から公理図式「$A \wedge (B \vee C) \Rightarrow (A \wedge B) \vee C$」を取り除き、それを決定可能にした相関論理体系が LR である。これらの論理体系の特徴は、帰結関係を自然に表現する内包的な基本論理結合子を持っていて、これらの体系の論理定理に実質含意のパラドクスを含んでいないということである。

3. 強相関性原理

しかし最近, 相関論理体系にも別種のパラドクスが含まれることが分かった[2]。これらのパラドクスは連言含意のパラドクス、あるいは選言含意のパラドクスと呼ばれているものである。

まず最初に連言含意のパラドクスについて例を挙げる。相関論理 R, LR において論理定理として認められている「$A \wedge B \Rightarrow A$」という論理式において、帰結関係に関する推論が行なわれる際に後件 A の真偽に何の影響も与えない B が、連言項として存在している。よって A と B の間には何の関係もなくとも、極端に言えば B が A の否定であってもこの帰結関係は成立する。これは人間の思考における推論を基準にすると奇妙で、妥当なものとはいえない。これが論理定理に関する連言含意のパラドクスである。

次に選言含意のパラドクスについて例を挙げる。同じく相関論理 R, LR において論理定理として認められている「$A \Rightarrow A \vee B$」という論理式において、先ほどの例と同様の不都合が起きるというものである。

このような２種類のパラドクスを排除する為に提案された基準が強相関性原理と呼ばれているものである[3]。

強相関性原理とは『ある論理式が連言（あるいは選言）含意のパラドクスでない妥当な帰結関係を表現しているとする為には、少なくともその論理式に出現する全ての変数がその式の前件部と後件部で共有されていなくてはならない。』という基準である[3]。

この強相関性原理に基づき、連言（あるいは選言）含意のパラドクスを排除した相関論理体系のうち、代表的なものに体系 Rc などがある[2]。しかし、Rc の決定可能性問題は未解決問題である。

図１に、ここまでに紹介した相関論理体系と強相関性原理との関係について示す。

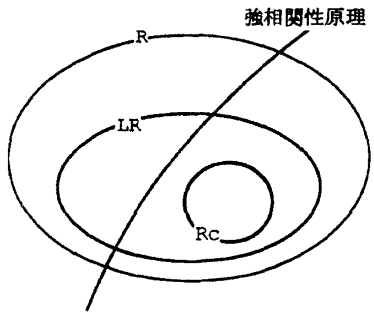

図 1: 相関論理体系 R, LR, Rc, 強相関性原理との間の関係

On Decidable Relevant Logic with the Strong Relevance Principle
Hajime MIYASATO and Jingde CHENG
Department of Computer Science and Comm. Eng.
Kyushu University

4. Rc の拡張

体系 LR と Rc の公理系を比較した場合、双方で証明可能な論理定理が数多く存在するので、Rc の sequent 演算体系を構築する際に L1 を基準にして考えた。しかし体系 L1 は、強相関性原理を満足しない論理式を証明することがあるので、その要因となる推論規則を L1 から取く必要がある。具体的には次の推論規則である。

$$\frac{\vdash \Delta, \neg A}{\vdash \Delta, \neg(A \wedge B)} \ (1) \qquad \frac{\vdash \Delta, \neg B}{\vdash \Delta, \neg(A \wedge B)} \ (2)$$

$$\frac{\vdash \Delta, A}{\vdash \Delta, A \vee B} \ (3) \qquad \frac{\vdash \Delta, B}{\vdash \Delta, A \vee B} \ (4)$$

ここで、推論規則 (1) の意味は、『Δ もしくは $\neg A$ が成り立つ時、Δ もしくは $\neg(A \wedge B)$ が成り立つ』というものであるが、この推論規則の存在により、L1 において強相関性原理を満たさない論理定理が証明される。

ここで、体系 L1 から推論規則 (1),(2),(3),(4) を取り除いたものを体系 L1s と呼ぶことにする。なお体系 L1s において、以下の補題が成り立つ。

[補題 1] 相関論理体系 L1s における論理定理は、全て強相関性原理の条件を満足している。

体系 L1s の推論規則において、上式が強相関性原理の条件を満たすならば、下式も強相関性原理の条件を満たすことを確認することによって補題 1 が証明できる（証明は略す）。

しかし体系 Rc の論理定理のうち体系 L1s で証明出来ないものも存在する。よってこのような論理定理も証明できるように、体系 L1s に新たな推論規則を追加する。

一例として次の論理式を考える。

$$(A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A) \qquad (5)$$

論理式 (5) は Rc の論理定理であるが、L1s では証明できない。もともと体系 L1 の推論規則のうち、連言『$\wedge$』に関するものは推論規則 (1), (2) のみであったので、これらを推論規則から除いた体系 L1s では論理式 (5) を証明することはできない。よって新たに連言『$\wedge$』に関する推論規則を構築し、体系 L1s の推論規則に加える必要がある。

ここで、以下の 3 つの推論規則を体系 L1s の推論規則に加える。

$$\frac{\vdash \Delta, A \quad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Delta, \Gamma, (A \wedge B)} \ (6) \qquad \frac{\vdash \Delta, \neg A, \neg B}{\vdash \Delta, \neg(A \wedge B)} \ (7)$$

$$\frac{\vdash \Delta, A, \neg A \quad \vdash \Gamma, B, \neg B \quad \vdash \Pi, C, \neg C}{\vdash \Delta, \Gamma, \Pi, ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)} \ (8)$$

推論規則 (6), (7), (8) を加えた後の L1s においては論理式 (5) は証明可能である（証明過程は略す）。以降、推論規則 (6), (7), (8) を加えた後の L1s を新たに L1s と呼ぶことにする。

なお、体系 L1s において、体系 Rc の公理を全て証明できることを確認した。しかし Rc の公理から演繹された論理定理が L1s で証明できるかどうかは定かではない。しかしある程度条件をつけた範囲においてならば、Rc の論理定理を L1s で証明可能になる。これを次の補題 2 として示す。

[補題 2] Rc の論理定理において、相関含意『$\Rightarrow$』、否定『$\neg$』と命題変数のみで構成される公理から演繹された論理定理は、体系 L1s において証明できる。

体系 L1s の推論規則と体系 L1 の推論規則を見比べてみて、相関含意と否定のみに関するものは一致する。よって体系 L1 における論理定理のうち、相関含意と否定のみで構成されるものについては体系 L1s においても必ず証明できる。よってこの補題 2 が成り立つ。

体系 L1 の論理定理のうち、強相関性原理の条件を満たす全ての論理定理を証明できるようになるまで、体系 L1s の推論規則を拡張する際の指標が、上記した補題 2 にうかがえる。つまり連言『$\wedge$』を含むような論理式においてのみの考察を行なえばよいことがわかる。またその際加えるべき推論規則についても、連言『$\wedge$』を含むものという条件が付くことが補題 2 から言える。

5. 終わりに

本論文では体系 L1 から、強相関性原理を満足しない推論規則を取り除いたり、新たに公理を加えたりすることにより、体系 Rc を拡張する手法について述べた。

現在の所 Rc の公理となっている論理定理を全て証明できるようになるまで L1s の拡張を行なったが、Rc の公理から演繹される論理定理もまた L1s で証明可能かどうか、また L1s の決定可能性問題などが、今後の課題として挙げられる。

参考文献

[1] A. R. Anderson and N. D. Belnap Jr., "Entailment: The Logic of Relevance and Necessity," vol.1, Princeton University Press, 1975.

[2] J. Cheng: "The Fundamental Role of Entailment in Knowledge Representation and Reasoning," Journal of Computing and Information, Vol.2, No.1, pp.853-873, Special Issue: Proc. 8th International Conference of Computing and Information, 1996.

[3] T. Tagawa, J. Cheng, and K. Ushijima, "On the Strong Relevance Principle in Relevant Logics," The Sixth Asian Logic Conference, May 1996.

[4] P. B. Thistlewaite, M. A. McRobbie. and R. K. Meyer, "Automated Theorem- Proving in Non- Classical Logic," Pitman, London, 1988.