5AH−4

証明力が拡張された適切さの論理体系 ER

吉浦 紀晃　米崎 直樹
東京工業大学 情報理工学研究科 計算工学専攻

1 はじめに

論理の主たる目的は、人間の行なう演繹的な推論を形式化することである。しかし、古典論理における含意「ならば」は、日常利用する「ならば」とは、違和を感じる箇所もある [8]。例えば、古典論理では、「2+3 = 5」が真であることから、「雪は白いならば、2+3=5」が真となる。しかし、このような推論は、奇異に感じられる。古典論理の含意が持つこのような違和感は次のように３つに分類される [2][8]。

1. 関連性の違和感　$A \to (B \to A)$
2. 恒真性の違和感　$(A \wedge \neg A) \to B, A \to (B \vee \neg B)$
3. 偶然性の違和感　$A \to ((A \to B) \to B)$

適切さの論理は、これらの違和感を除去することを目的として研究されてきた。Lewis による関連性の違和感が除去された厳密含意の提案 [5] に始まり、多くの適切さの論理の体系が提案されている。代表的な体系としては、Church[3] や Moh[7] による、関連性と恒真性の違和感が除去された論理体系 R や、Ackermann による、すべての違和感が除去された論理体系 E などがある [1]。関連性・恒真性の違和感は強い違和感とみなされ、ほとんどの体系で、これらは除去されている。

一方、適切さの論理では、体系が弱いという問題がある。例えば、自然演繹における推論規則 Disjunctive syllogism(DS) が許されない。

$$\frac{A \quad \neg A \vee B}{B}\,DS \qquad \frac{\neg A \quad A \vee B}{B}\,DS$$

この推論規則が認められない理由は、以下のように $(A \wedge \neg A) \to B$ が証明可能となるためである [5]。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A\wedge\neg A]}{A}\wedge E \qquad \dfrac{\dfrac{[A\wedge\neg A]}{\neg A}\wedge E}{\neg A\vee B}\vee I}{B}\,DS}{A\wedge\neg A\to B}\to I$$

[5] では、DS が問題のある規則と見なされ、適切さの論理では、この推論規則は除去されている。

Relevant logic ER, the extended system R
Noriaki Yoshiura, Naoki Yonezaki
Department of Computer Science, Tokyo Institute of Technology
2-12-1, Ookayama, Meguro-ku Tokyo 152, Japan

また、違和感を含んでいない以下の式が、適切さの論理では定理ではない [2]。

1. $A \to (B \to (A \wedge B))$
2. $A \to (A \wedge (B \vee \neg B))$

適切さの論理では、1. が定理である場合、$A \to (B \to A)$ が定理となり、また、2. が定理である場合、$A \to (B \vee \neg B)$ が定理となるため、これら２つの式は定理とはならない。

このように、適切さの論理では、違和感を除去するために、結果として、定理となることが自然であると考えられる式が定理とはならず、また、自然な推論規則が成り立たない。

本稿では、関連性・恒真性の違和感が除去されており、体系 R よりも強い論理体系 ER を提案する。ER は、[4] に示されている sequent による自然演繹の体系として与えられ、各推論規則では、式の属性が利用される。この属性は、証明を制御し、違和感を含む式の推論を防ぐために利用される。また、属性を利用する点からみると、ER は、Labelled deductive system の一種であるといえる [6]。

以下、２章では、ER を定義し、３章では ER の特徴を示し、４章で本稿をまとめる。

2 論理体系 ER

定義 2.1 原子命題は、ER の式である。また、A が式ならば、$\neg A$ は式であり、A と B が式ならば、$A \wedge B$、$A \vee B$、$A \to B$ は式である。■

定義 2.2 式の属性値を次のように定義する。

- c $\cdots$ *I-rule* で推論されたもの
- e $\cdots$ *E-rule* で推論されたもの
- r $\cdots$ 背理法 *(RAA)* で *discharge* 可能な仮定

I-rule・*E-rule* とは、自然演繹における結合子を導入する規則・除去する規則である。式 A と属性 φ からなる $A : \varphi$ を属性式と呼ぶ。■

以下では、$\varphi, \varphi_1, \cdots$ を属性値上の変数とする。

定義 2.3 $\Gamma \vdash \mathcal{A}$ を *sequent* と呼ぶ。ただし、Γ は、属性式の *multi set* であり、$\mathcal{A}$ は属性式か空白である。

ER の証明は、公理から始まり、以下の推論規則を利用して構成される。

推論規則

$$A:\varphi \vdash A:\varphi \ \text{公理}^{(注1)}$$

$$\frac{\Gamma,\neg A:r\vdash}{\Gamma\vdash A:e}\ RAA \qquad \frac{\Gamma\vdash A:\varphi_1 \quad \Delta\vdash B:\varphi_2}{\Gamma,\Delta\vdash A\wedge B:c}\ \wedge I$$

$$\frac{\Gamma\vdash A\wedge B:e}{\Gamma\vdash A:e}\ \wedge E1 \qquad \frac{\Gamma\vdash A\wedge B:e}{\Gamma\vdash B:e}\ \wedge E2$$

$$\frac{\Gamma\vdash A:\varphi}{\Gamma\vdash A\vee B:c}\ \vee I1 \qquad \frac{\Gamma\vdash B:\varphi}{\Gamma\vdash A\vee B:c}\ \vee I2$$

$$\frac{\Gamma\vdash A\vee B:e \quad \Delta_1,A:e\vdash C:\varphi_1 \quad \Delta_2,B:e\vdash C:\varphi_2}{\Gamma,\Delta_1,\Delta_2\vdash C:\varphi_3}\ \vee E1^{(注2)}$$

$$\frac{\Gamma\vdash A\vee B:e \quad \Delta_1,A:e\vdash \quad \Delta_2,B:e\vdash}{\Gamma,\Delta_1,\Delta_2\vdash}\ \vee E2$$

$$\frac{\Gamma,A:e\vdash B:\varphi}{\Gamma\vdash A\to B:c}\ \to I \qquad \frac{\Gamma\vdash A\to B:e \quad \Delta\vdash A:\varphi}{\Gamma,\Delta\vdash B:e}\ \to E$$

$$\frac{\Gamma\vdash A:\varphi_1 \quad \Delta\vdash\neg A:\varphi_2}{\Gamma,\Delta\vdash}\ \neg E^{(注3)} \qquad \frac{\Gamma,A:e\vdash}{\Gamma\vdash\neg A:c}\ \neg I$$

$$\frac{\Gamma,\neg A:e\vdash B:\varphi}{\Gamma\vdash A\vee B:c}\ EM1 \qquad \frac{\Gamma,\neg B:e\vdash A:\varphi}{\Gamma\vdash A\vee B:c}\ EM2$$

$$\frac{\Gamma\vdash A\vee B:e \quad \Delta,\neg A:e\vdash}{\Gamma,\Delta\vdash B:e}\ DS1$$

$$\frac{\Gamma\vdash A\vee B:e \quad \Delta,\neg B:e\vdash}{\Gamma,\Delta\vdash A:e}\ DS2$$

$$\frac{\Gamma,A:\varphi,A:\varphi\vdash\mathcal{A}}{\Gamma,A:\varphi\vdash\mathcal{A}}\ C1^{(注4)} \qquad \frac{\Gamma,A:e,A:r\vdash\mathcal{A}}{\Gamma,A:r\vdash\mathcal{A}}\ C2^{(注4)}$$

(注1). φ は、e または r である。

(注2). φ_1,φ_2 がともに、e であるならば、φ_3 は e である。それ以外の場合は、φ_3 は c である。

(注3). φ_2 は、e,r のいずれかであり、r である場合、φ_1 は e である。

(注4). $\mathcal{A}$ は、属性式か空白を示す。

定義 2.4 $\vdash A:\varphi$ が証明された場合、A を ER の定理と呼び、$\vdash A$ と書く。

3 ER の特徴

この章では、ER の特徴を述べる。

定理 3.1 関連性・恒真性の違和感の除去

1. $\nvdash A\to(B\to A)$

2. $\nvdash A\to(B\vee\neg B)$

3. $\nvdash(A\wedge\neg A)\to B$ ■

適切さの論理では、$A\to B$ が定理である場合、A と B に共通の原子命題が存在する性質 Variable-sharing[2] が適切さの必要条件とされており、ER でも、この特徴が成り立つ。

定理 3.2 *Variable-sharing*

$\vdash A\to B$ ならば、A,B に共通の原子命題が存在する。 ■

定理 3.1,3.2は、証明の構造に関する帰納法によって証明される。

ER では、推論規則の定義から明らかなように、Disjunctive Syllogism(DS) が成り立つ。また、ER では、R で証明不能な次の式が定理となることや、ER が R より強い体系であることがいえる。

定理 3.3

1. $\vdash A\to(B\to(A\wedge B))$

2. $\vdash(A\wedge B\to C)\to(A\to(B\to C))$

3. $\vdash A\to A\wedge(B\vee\neg B)$

4. $\vdash A\vee(B\wedge\neg B)\to A$ ■

定理 3.4 ER は、R より強い体系である。 ■

定理 3.4は、R の自然演繹の体系 [2] の証明に対応する ER の証明が存在することを示すことで証明される。

4 おわりに

本稿では、適切さの論理 ER を提案した。この体系は、適切さの論理の従来の体系よりも、強い体系であり、関連性・恒真性の違和感が除去されている。また、人間の演繹的な推論の形式化としては、DS が成り立つことが望ましく、ER ではこれが可能であるという点で、適切さの論理の従来の体系より有効な体系であるといえる。

参考文献

[1] ACKERMANN, W. Begründung einer strenger Implikation, *Journal of symbolic logic*, **21** (1956), 113–128.

[2] ANDERSON, and BELNAP, *Entailment. The logic of relecance and necessity*, Princeton University Press (1975).

[3] CHURCH, A. The weak theory of implication (1951).

[4] DUMMETT, M. *Elements of Intuitionism*, Oxford U.P. (1977).

[5] LEWIS, C. and LANGFORD, C. *Symbolic Logic*, The Century Co. (1932).

[6] M.GABBAY, D. *Labelled Deductive Systems*, Vol. 1 of *Oxford Logic Guides,33*, Oxford U.P. (1996).

[7] MOH, S. K. The deduction theorems and two new logical systems, Methodos, Vol. 2 (1950), 56–75.

[8] 杉原丈夫 非古典論理学, 槙書店 (1975).