ある種の非線形計画問題の代数的解法について

4Ｈ－３

白石 啓一　甲斐 博　齋藤 友克[†]　野田 松太郎

愛媛大学 工学部　上智大学 理工学部[†]

1 はじめに

情報システム工学の主要な分野に、システムの最適化を行うための数理計画法がある。これは、『数式で与えられた制約のもとで、数式として表現された目的関数を最大(または最小)にするための数理的手法』ということができる。非線形計画問題の場合、従来、最急降下法、ニュートン法の活用によって、最適解を求めていた。これらの手法により、それなりの結果を得ることは可能であるが、求まる最適解は局所的最適解であり、大域的最適解を得るためには、初期値を選び直して何度も計算を繰り返す必要がある。また、初期値の選び方によっては、最適解が求まらない場合もある。本論では、代数的手法を基礎とした非線形計画問題の大域的最適解を求める方法を提案する。本手法は、非線形計画問題のうち、制約条件と目的関数が多項式で表現される場合に限っているが、線形計画問題をも扱うことができる。

2 代数的解法

最大化問題に対しては、目的関数に (-1) を掛けて最小化問題に変換できるので、ここでは最小化問題を扱うことにする。問題

$$
\begin{array}{lll}
\text{目的関数} & f(\boldsymbol{x}) \quad \rightarrow \quad \text{最小} & \\
\text{制約条件} & g_j(\boldsymbol{x}) \leq 0 \quad (j=1,2,\ldots,m) & (1)\\
 & h_k(\boldsymbol{x}) = 0 \quad (k=1,2,\ldots,l) &
\end{array}
$$

を考える。ただし、$f(\boldsymbol{x}), g_j(\boldsymbol{x}), h_k(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して定義される実数値関数であり、$f(\boldsymbol{x}), g_j(\boldsymbol{x}), h_k(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{Q}[\boldsymbol{x}]$ を満たす。ここで、制約集合

$$
\begin{aligned}
\mathbb{X} \;=\; & \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_j(\boldsymbol{x}) \leq 0 (j=1,2,\ldots,m), \\
& h_k(\boldsymbol{x}) = 0 (k=1,2,\ldots,l)\} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Algebraic Method for Non-linear Programming
K.Shiraishi, H.Kai, T.Saito, M.T.Noda
Ehime Univ., 3 Bunkyocho, Matsuyama, Ehime 790-77, Japan
Sophia Univ., 7-1 Kioicho, Chiyoda, Tokyo 102, Japan

を制約集合の内部領域 D と境界 C とに分ける。D, C は各々

$$
\begin{aligned}
D \;=\; & \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_j(\boldsymbol{x}) < 0 (j=1,2,\ldots,m), \\
& h_k(\boldsymbol{x}) = 0 (k=1,2,\ldots,l)\} \qquad (3) \\
C \;=\; & C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_m \qquad (4)
\end{aligned}
$$

となる。ここで、$C_i = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_i(\boldsymbol{x}) = 0,\ g_j(\boldsymbol{x}) \leq 0 (j=1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,m),\ h_k(\boldsymbol{x}) = 0 (k=1,2,\ldots,l)\}$ である。すなわち、(1) 式で表現された多項式制約条件、多項式目的関数である一種の非線形計画問題の最適解は D あるいは C 内に存在することになる。各々の場合に最適解を求めるための手法を述べる。

1. 最適解が D に存在する場合

スラック変数$\lambda_j \geq 0, j=1,2,\ldots,m$ を導入すると、問題 (1) を

$$
\begin{array}{lll}
\text{目的関数} & f(\boldsymbol{x}) \quad \rightarrow \quad \text{最小} & \\
\text{制約条件} & g_j(\boldsymbol{x}) + \lambda_j = 0 \quad (j=1,2,\ldots,m) & (5)\\
 & h_k(\boldsymbol{x}) = 0 \quad (k=1,2,\ldots,l) &
\end{array}
$$

と書き直すことができ、最適解の必要条件として、

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1,2,\ldots,n) \\
g_j(\boldsymbol{x}) + \lambda_j = 0 \quad (j=1,2,\ldots,m) \\
h_k(\boldsymbol{x}) = 0 \quad (k=1,2,\ldots,l)
\end{array}
\right. \qquad (6)
$$

が得られる。(6) を代数的に解くことにより、解 $(\boldsymbol{x}^r, \boldsymbol{\lambda}^r)$ が得られる。この中で、$\lambda_j \geq 0, j=1,2,\ldots,m$ を満たすものが可能解となり、その中でも、$f(\boldsymbol{x}^i)$ を最小にする $(\boldsymbol{x}^r, \boldsymbol{\lambda}^r)$ が最適解の候補になる。

2. 最適解が C に存在する場合

写像

$$
\phi : t \rightarrow \boldsymbol{x} \mid \forall t\ \phi(t) \in C \qquad (7)
$$

を考えると、

$$
\frac{\partial f(\phi(t))}{\partial t} = 0 \qquad (8)
$$

が最適解の必要条件になる。これより、t^r が得られる。$f(\phi(t^r))$ を最小にする t^r を ϕ により写像すると、最適解の候補 $\boldsymbol{x}^r$ が得られる。

以上の二つの場合に解を求め、f を最小にするものを選択すれば、与えられた最適化問題の解を得ることができる。制約条件や目的関数を多項式に限っているため、問題は単に連立方程式を解く問題に帰着する。この連立方程式を代数的に解くことによって、解を正確に得ることができる。この解法の概略を以下に示す。

1. 与えられた問題の多項式の係数を有理係数に変換
2. 領域 D 内の最適解をグレブナ基底の算法を用いて求める
3. 領域 C 内の最適解を求める
4. 以上の各候補の中、目的関数を最小にするものを選ぶ

3 適用例

例題として簡単な非線形計画問題と線形計画問題を挙げる。

例題 1 非線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{目的関数} & f=(x_1-1)^2+(x_2-2)^2 \quad \rightarrow \quad \text{最小} \\ \text{制約条件} & g=x_1^2+x_2-4\leq 0 \\ & x_1,x_2\geq 0 \end{array}$$

を考える。$\lambda\geq 0$ を導入する。

最適解が領域内部にあると仮定すると、

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}=2x_1-2=0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}=2x_2-4=0 \\ g+\lambda=x_1^2+x_2-4+\lambda=0 \end{cases}$$

より、可能解 $f=0(x_1=1,x_2=2)$ が得られる。

最適解が境界上にあると仮定する。$x_1=0$ の場合、目的関数は

$$f=x_2^2-4x_2+5$$

となる。

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_2}=2x_2-4=0 \\ g+\lambda=x_2-4+\lambda=0 \end{cases}$$

より、可能解 $f=1(x_1=0,x_2=2)$ が得られる。

同様に可能解を求めると、表 1 が得られる。これより、最適解は $0(x_1=1,x_2=2)$ である。

例題 2 線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{目的関数} & f=-2x_1+3x_2 \quad \rightarrow \quad \text{最小} \\ \text{制約条件} & g=x_1+x_2-2\leq 0 \\ & x_1,x_2\geq 0 \end{array}$$

を考える。例題 1 と同様に可能解を求めると、表 2 が得られる。これより、最適解は $-4(x_1=2,x_2=0)$ である。

		x_1	x_2	λ	f
領域内部		1	2	1	0
境	$x_1=0$	0	2	2	1
	$x_2=0$	1	0	3	4
界	$\lambda=0$	1.3660	2.1339	0	0.15192
	$x_1=x_2=0$	0	0	4	5
上	$x_1=\lambda=0$	0	4	0	5
	$x_2=\lambda=0$	2	0	0	5

表 1: 例題 1 の可能解

		x_1	x_2	λ	f
境	$x_1=x_2=0$	0	0	2	0
界	$x_1=\lambda=0$	0	2	0	6
上	$x_2=\lambda=0$	2	0	0	-4

表 2: 例題 2 の可能解

4 おわりに

制約条件と目的関数が多項式で表される場合の非線形計画問題の代数的解法を提案した。代数的に解くことにより、従来の解法で最適解を求められない場合を回避することが可能になり、正確な結果を得ることが期待できる。また、線形計画問題も同じ手法で解くことができる。現在、以下の場合に問題が残っており、今後の課題である。

1. 係数に実数や浮動小数を持つ問題を有理係数に変換する場合
2. 計算途中に現れる 1 変数代数方程式を代数的に解くことができない場合
3. 写像 ϕ を求めることが困難な場合

また、制約条件や目的関数が多項式で表せない一般の非線形計画問題に対しては、多項式近似を行った後、本手法を適用することが考えられるが、この場合の妥当性の解決も残されている。