連立代数方程式の擬局所化の過程で生じる誤差について*

3G−1

鈴木秀男　　小林英恒

東京職業能力開発短大・情報処理 †　　日本大学理工・数学 ‡

1. はじめに

筆者らは、これまで数値計算によって連立代数方程式の解の重複度を求めることを研究してきた[1)]。その成果として数値計算により、ある程度分離性を保ちつつ、真の重複度をプラス方向とマイナス方向から挟み込む計算法を考案した[2),3)]。しかし、アルゴリズムの性質上、非常に近接した根が現われる可能性があり、もしそのような場合に、近接根を分離できなければもとの根の重複度が求まらない。

そこで、筆者らは一次分数変換を利用し近接根の分離を行なった[4),5)]。さらに、一次分数変換を用いることにより、連立代数方程式の解 (重根、近接根も含め) を高精度で計算出来ることも示した[6)]。ここでは、連立代数方程式に一次分数変換を適用し、近接根が分離できることと擬局所化の誤差について報告する。

2. 一次分数変換

n 次元複素射影空間 $P^n(C)$ の斉次座標系 $(X_0 : X_1 : \cdots : X_n)$ を用いて表現された m 次斉次多項式 $F(X_0, X_1, \cdots, X_n)$ を、$n+1$ 次正則行列 $A = (a_{ij})_{0\le i,j\le n}$ に対応する射影変換 P_A

$$P_A \;:\; (X_0 : X_1 : \cdots : X_n) \to \left(\sum_{i=0}^{n} a_{0i}X_i : \sum_{i=0}^{n} a_{1i}X_i : \cdots : \sum_{i=0}^{n} a_{ni}X_i\right)$$

により変換する。行列 A の逆行列 A^{-1} を考えることにより、逆変換 $P_A^{-1} = P_{A^{-1}}$ も同様に定義できる。

このとき、連比にアフィン空間 C^n の点

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (X_1/X_0, X_2/X_0, \cdots, X_n/X_0)$$

を対応させることで射影空間の点とアフィン空間の点とが対応付けられる。すなわち、アフィン空間での各座標は一次分数変換の形で与えられる。

超平面 $U_0 = \sum_{i=0}^{n} a_{0i}X_i = 0$ が元の方程式の根を含まないように射影変換を選んで、この超平面を新たな無限遠超平面とするとき有限部分での方程式の根が元の方程式の根と重複度も含めて1対1に対応する。

3. 一次分数変換の型

適当な複素数 α と実数 ϵ に対し $W(\alpha;\epsilon) = \{z \in C \mid |z-\alpha| < \epsilon\}$ とするとき、複素数 α_j と十分小さい正の実数 $\epsilon_j, j = 1, \cdots, n$ に対し

$$W(\alpha_1, \cdots, \alpha_n; \epsilon_1, \cdots, \epsilon_n) = W(\alpha_1;\epsilon_1) \times \cdots \times W(\alpha_n;\epsilon_n)$$

とし、この範囲にある根を分離する。ただし、近接根以外の根は近接根から十分離れているものとする。

行列 A の選び方により様々な型の一次分数変換が存在するが、ここでは一次分数変換の具体的な型として

$$\sum_{j\in I} X_j + \left(\sum_{j\in I}\gamma_j - \sum_{j\in I}\alpha_j\right) X_0 = 0$$

を新たな無限遠超平面に変換するような射影変換を考える。ただし、この超平面上に解は存在しないものとする。ここで、I は添字の集合であり、$\gamma_j = k_j\epsilon_j\ (k_j \ge 1)$ である。集合 I の選び方により、種々の無限遠超平面を決めることができる。

逆に、もとの無限遠超平面 $X_0 = 0$ は

$$\sum_{j\in I} U_j - U_0 = 0$$

と変換される。具体的には $n+1$ 次正則行列を

$$\begin{pmatrix} \sum_{j\in I}(\gamma_j - \alpha_j) & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \cdots & \delta_n \\ -\alpha_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_2 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix}$$

と選べばよい。$\delta_i = 1 (i \in I), \delta_i = 0 (i \notin I)$ である。

4. 根の移動

領域 W に含まれる点については、その要素が $x_j = \alpha_j + c_j\epsilon_j\ (|c_j| \le 1)$ と書けるから

$$u_j = \frac{c_j\epsilon_j}{\sum_{l\in I}(k + c_l)\epsilon_l}$$

となる。$|c_l| \le 1, \epsilon \ll 1$ であるから k の値をある程度大きくしても、各 u_j は元の空間での値に比べ分離されていることが分かる。とくに $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \cdots = \epsilon$ のときは $u_j = c_j / \sum_{l\in I}(k + c_l)$ となり ϵ に関係しない。また領域 W に含まれない点については

$$\sum_{j\in I} u_j = \frac{1}{1 + \sum_{l\in I}\gamma_l / \sum_{j\in I}(x_j - \alpha_j)}$$

となり、$O(\sum\gamma_l / \sum(x_j - \alpha_j))$ の割合で右辺の値は1へ近づくことが分かる。したがって領域 W に含まれない点は、領域から離れるほど、あるいは ϵ が小さくなるほど超平面 $\sum_{j\in I} u_j - 1 = 0$ に近づくことになる。

5. 一次分数変換による誤差と擬局所化による誤差

一次分数変換された連立代数方程式 $g(u) = 0$ を数値計算で解いた場合の誤差については、次が成り立つ。

命題 1　$g(u) = 0$ の近似解を $u = (u_1, \cdots, u_n)$ とし、厳密解 $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \cdots, \tilde{u}_n)$ との差を $\Delta u_j = u_j - \tilde{u}_j$

---

*Error of pseudolocalization of system algebraic equations

†Hideo Suzuki, Tokyo Polytechnic College, 2-32-1 Ogawanishi Kodaira Tokyo 187 Japan

‡Hidetsune Kobayashi, Nihon University, 1-8-14 Kanda-surugadai Chiyoda Tokyo 101 Japan

とする。また、uをもとの空間へ逆変換したときの誤差を$\Delta x_j = x_j - \tilde{x}_j$とおくとき、次が成り立つ。

$$|\Delta x_j| \fallingdotseq \sum_{l \in I} \gamma_l |\Delta u_j|$$

したがって、$\sum \gamma_l \ll 1$となるようにγ_lを選べば、変換された方程式を解いて、その近似解を元の空間へ戻しても精度が保証される。

さらに、領域Wから離れている根は、ある特定の超平面に近づく。この性質を利用すれば、減次が行なえる。$1 \in I$でu_1についての減次は

$$\begin{aligned} g_j(u_1, \cdots, u_n) &= h_j(u_1, \cdots, u_n)(\sum u_l - 1) \\ &\quad + r_j(u_2, \cdots, u_n) \end{aligned}$$

により行われ、このような操作を繰り返して適用することにより次数を減らすことが出来る。そして、減次に伴う誤差については次が成り立つ。

命題 2　連立代数方程式の交点は、非特異点とする。このとき近接根に対応する$(\tilde{\alpha}_1, \cdots, \tilde{\alpha}_n)$に対して$g_1(\tilde{\alpha}_1, \cdots, \tilde{\alpha}_n) = 0, \cdots, g_n(\tilde{\alpha}_1, \cdots, \tilde{\alpha}_n) = 0$が成り立ち$g_j(u_1, \cdots, u_n)$について減次を行った多項式を$h_j(u_1, \cdots, u_n)$とし、$g_1(\tilde{\alpha}_1 + \Delta_1, \cdots, \tilde{\alpha}_n + \Delta_n) = 0, \cdots, h_j(\tilde{\alpha}_1 + \Delta_1, \cdots, \tilde{\alpha}_n + \Delta_n) = 0, \cdots, g_n(\tilde{\alpha}_1 + \Delta_1, \cdots, \tilde{\alpha}_n + \Delta_n) = 0$が成り立つとき

$$|\Delta_j| \fallingdotseq L \left| \epsilon^{n_p - r_p} / \prod_{i=1}^{s_p} \lambda_i^{(p)} \right|$$

という関係式が成り立つ。ここで$\lambda_i^{(p)}$は$f_p(x_1, 0, \cdots, 0) = \prod_{i=1}^{r_p}(x_1 - \mu_i^{(p)}) \prod_{i=1}^{s_p}(x_1 - \lambda_i^{(p)}), n_p = r_p + s_p$と因数分解したときの近接根から十分離れた根に対応するものであり、Lは逆に近接根(正確には$|c_i| < 1$)により決まる定数である。

この命題よりϵが十分小さく$r_p \ll s_p$であり、$\lambda_i^{(p)}$が近接根から離れるほど減次に伴う誤差が小さくなることがわかる。我々は、実用上の誤差を$|\Delta_j| \fallingdotseq |\epsilon^{n_p - r_p}|$で表すことにする。また減次可能であるかどうかの簡単な評価として

$$p_c = \frac{g(0, \cdots, 0) - h(0, \cdots, 0)}{g(0, \cdots, 0)}, \quad g(0, \cdots, 0) \neq 0$$

を利用し、$p_c \gg 1$ならば減次ができず、$p_c \ll 1$ならば減次が可能であるとした。

さらに、多変数の場合に、もし

$$f_j(x_1, \cdots, x_n) = x_i^n + a_1 x_i^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x_i + a_n = 0$$

において$a_1(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n) = 0$となるような$i$があればそれを利用して減次を行えば減次による誤差が保証されることを示すこともできる。

6．数値例

$f_1(x, y) = x^3 + \frac{99999997}{10000000}x^2 - \frac{199999997}{100000000000000}x - y^2 - \frac{1}{5000000}y + \frac{89999999}{1000000000000000000000} = 0$, $f_2(x, y) = x^5 - y^2 + \frac{1}{1000000000000} = 0$を一次分数変換し、それを減次したときの数値実験の結果を示す。f_1, f_2を一次分数変換したものをg_1, g_2で表し、それらを減次したものをh_1, h_2で表す。それぞれのp_cを計算すると$0.01, 10^{-13}$であるからg_2を減次するのが妥当である。

方程式を一次分数変換し数値計算で解いたときの解と、減次したときの解のいくつかを表にまとめた。各段は、上段がuの値で、下段がvの値である。表から減次をしても精度良く計算されていることが分かる。また、一番下に計算時間を示したが、減次にともない計算時間が短縮されているのが分かる。

表 1 分数変換による数値解

$g_1 = 0, g_2 = 0$	$h_1 = 0, g_2 = 0$
$-0.2541496620E-01$	$-0.2542898086E-01$
$0.1025414966E+00$	$0.1025428981E+00$
$-0.1880769886E-01$	$-0.1882493714E-01$
$-0.1018807699E+00$	$-0.1018824937E+00$
$0.4286532766E-01$	$0.4288034232E-01$
$0.9571346723E-01$	$0.9571196577E-01$
	10^{-5}
0.18642 秒	0.10834 秒
$g_1 = 0, h_2 = 0$	$h_1 = 0, h_2 = 0$
$-0.2541496620E-01$	$-0.2542898086E-01$
$0.1025414966E+00$	$0.1025428981E+00$
$-0.1880769886E-01$	$-0.1882493714E-01$
$-0.1018807699E+00$	$-0.1018824937E+00$
$0.4286532766E-01$	$0.4288034232E-01$
$0.9571346723E-01$	$0.9571196577E-01$
10^{-25}	10^{-5}
0.60512E-01 秒	0.42944E-01 秒

参考文献

1) H. Kobayashi & H. Suzuki. : The multiplicity of a solution of a system of algebraic equations, Proc. of the 1992 International Workshop on Mathematics Mechanization, pp.53-64.

2) H. Kobayashi , H. Suzuki. & Y. Sakai. : Numerical calculation of the multiplicity of a solution to algebraic equations. Mathematics of Computation (掲載予定)

3) H. Kobayashi , H. Suzuki. & Y. Sakai. : The multiplicity of a solution of a system of algebraic equations II, Proc. of the 1994 Winter Workshop on Computer Algebra , pp.11-15.

4) 小林, 鈴木, 酒井：分数変換による近接根の分離について, 数式処理 vol.2 no.2 pp.2-7 (1993)

5) H. Kobayashi , H. Suzuki. & Y. Sakai. : Separation of close roots by linear fraction transformation, Proc. of ASIAN symposium on computer mathematics, pp.1-10 (1995)

6) 鈴木, 小林：一次分数変換を利用した連立代数方程式の高精度計算法, 第 53 回情報処理学会全国大会講演論文集 1 巻 pp.63-64 (1996)