２次元のトポロジーの展開図に基づく可視化

1B－6

川道亮治 †　品川嘉久 †　Lim Chong Seng†

東京大学 †

1　はじめに

トポロジー理論は、幾何学の中の一つの分野として発展してきた。物体の位相を分類するのにトポロジーの理論はなくてはならないものである。トポロジー理論の中では、物体の位相を分類するには、展開図を書いたり、多様体の知識を用いたり、ホモロジー理論を用いたりする。ところが、これらの理論は多大な想像力と理解力を必要とする。なぜなら、２次元曲面でさえ、曲面を埋め込むために、５次元の空間が必要だからである。（閉曲面なら４次元空間が必要）。そこで、トポロジーを理解するための手助けとなるような、トポロジー教育のシステムというのが有用である。それは、さまざまな図形を可視化し、それらの図形をを分類する過程も可視化するのである。本研究では、２次元閉曲面に注目し、曲面をトポロジー理論を用いて分類する過程をアニメーションを用いて可視化するようなシステムを提案する。

2　背景となる理論と本研究の目的

トポロジーの分類は２次元で行うことができる。それは、トポロジーの展開図を作り、それを分類することができるからである。展開図とは多角形で表されていて、合わせる辺とその向きが矢印で示されている。これを展開多角形という。

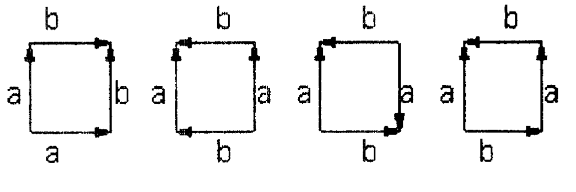

図 1: 四角形で表された閉曲面の展開図。左から球面、トーラス、射影平面、クライン管を表す

展開角形に関して、次のような定理がある。

1. すべての閉曲面は展開多角形で表すことができる。
2. すべての展開多角形は閉曲面を表す。

つまり、閉曲面を分類するには、展開多角形を分類することで必要十分なことがわかる。本研究の目的は

1. 三角パッチの張られた複雑な閉曲面を展開多角形に直し、
2. その展開多角形を標準形と呼ばれるものに直し、閉曲面の位相情報を求め、
3. その位相の表す標準的な閉曲面を再形成する

過程をアニメーションすることである。

3　展開多角形の作り方

閉曲面から展開多角形を作る過程にはホモロジー理論が必要である。ホモロジー理論は、ホモロジー群という群の分類によってトポロジーの分類をするための方法であるが、このホモロジー群の元が展開多角形の辺に関係している。閉曲面において、ホモロジー群の元は閉曲面の切断線になっている。例えば、トーラスでは図 2のように２本の切断線があり、これがホモロジー群の元になっている。この切断線に沿って（切断線が離れている場合はそれらを繋げてから）閉曲面を開くと、展開多角形が生成される。

この過程をアニメーションするには、まず２次元閉曲面を２次元に平行投影などで投影し、ホモロジー群の元に沿って切り開き、徐々に展開図へと変形させることが必要である。この部分は未完成である。

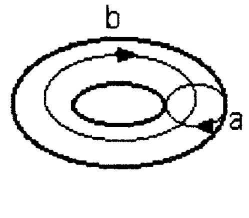

図 2: トーラスのホモロジー群すなわち切断線 a, b

4　展開多角形の分類

4.1　展開多角形の定式化と初等変形

展開多角形を式で表すために、展開多角形の辺を反時計回りに見て、矢印が正方向に向いているときは a

Visualization of the two-dimensional topology based on development.

Ryoji Kawamichi†, Yoshihisa Shinagawa† and Lim Chong Seng†
The University of Tokyo†

逆方向を向いているときは a^{-1} と表す。つまり図 1は それぞれ $a^{-1}abb^{-1}, a^{-1}b^{-1}ab, a^{-1}ba^{-1}b, a^{-1}bab$ と書くことができる。

展開多角形は変形することができる。例えば、図 3のように展開多角形を切断して別の部分で合わせて変形する。すなわち、$PaQRa^{-1} \rightarrow PbRQb^{-1}$ という変形が可能である。このような変形を初等変形という。

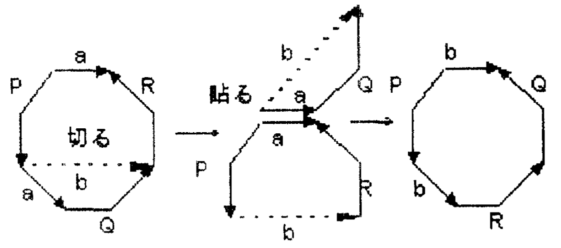

図 3: 展開多角形の初等変形の例

初等変形には次の４種類があり、それらの逆も初等変形と呼ぶ。

1. $X = Paa^{-1} \rightarrow X' = PQ$
2. $X = PaQRa^{-1} \rightarrow X' = PbRQb^{-1}$
3. $X = PaQaR \rightarrow X' = PbbQ^{-1}R$
4. $X = PQaaR \rightarrow X' = PbQ^{-1}bR$

4.2 展開多角形の分類

このような初等変形をある一定の規則によって繰り返すことによって、展開多角形は次のように分類される。これを展開多角形の標準形と呼ぶ。

1. $X = aa^{-1}bb^{-1}$
   種数０のトーラス（球面）
2. $X = a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots\cdots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}$
   種数ｎのトーラス（球面にｎ個のトーラスをつけたもの
3. $X = a_1a_1\cdots\cdots a_na_n$
   球面にｎ個のメビウスの輪をつけたもの

任意の展開多角形を標準形に直すアニメーションプログラムを実装した（図 4）。

5 展開多角形から閉曲面の形成

先に述べた３つのタイプの展開多角形の標準形から閉曲面を形成する方法について考える。この部分はまだ実装されていない。(2) 型の展開多角形の場合、$a_kb_ka_k^{-1}b_k^{-1}$ の部分だけそれぞれ切り取って図 5のように組み立てるとトーラスに穴のあいたものが n 個できあがる。そして、残された多角形は球に n 個の穴があいたものになる。これらをくっつければ種数 n のトーラスができあがる。また、(3) 型の場合も同様に a_kb_k

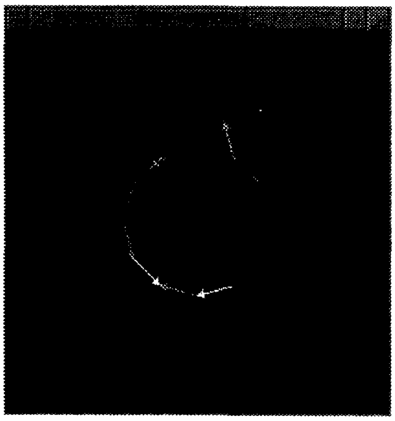

図 4: 展開多角形の標準化プログラム

をそれぞれ切り出して、組み立てると十字帽（メビウスの輪の境界を円の形にしたもの）ができあがる。それと球面に n 個の穴をあけたものができあがりそれらを合わせればよい。

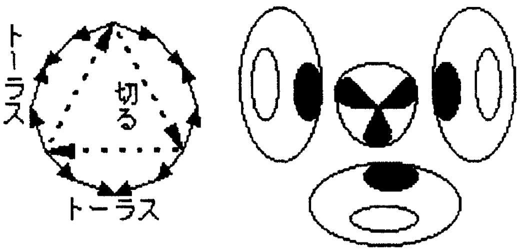

図 5: 展開多角形から閉曲面の形成

6 まとめと今後の課題

本研究では、２次元のトポロジーを展開図に直し、展開図を標準形に直し、再び組み立てることにより、理解の難しいとされる２次元トポロジーの分類をするアニメーション化システムを提案した。本システムは、想像の難しい高次元の世界での図形の分類の理解の助けになるであろう。数学教育に用いることができるようまだ実装されていない多角形の展開、再形成プログラムを完成させる予定である。

参考文献

[1] 瀬山士朗 ’トポロジー：柔らかい幾何学’ 日本評論社.

[2] 松本幸夫 ’４次元のトポロジー’ 日本評論社.