1V−10

自由曲面の多面体近似とその応用

—2 次曲面の多面体近似—

東京電機大学 ○清水 徹 斉藤 剛

1 はじめに

曲面の多面体近似は, 表示を始めとして種々の処理に利用されている. 多面体近似において, 細かい多面体で近似すると近似精度は向上するが, 近似後の計算量は増加する. 一方近似を荒くすると, その後の計算誤差が大きくなる.

また近似計算をおこなう目的により, どのような評価量で近似精度を保つかが変わる. したがって, 目的とする評価量における近似精度を満たしつつ, できるだけ少ないポリゴン数で多面体近似する方法が求めら, 種々報告されている.

本報告では誤差精度を制御する評価量として曲面との距離を用い, まず 2 次曲面と近傍点の距離を近似的に求める方法を示す. つぎにこの距離により制御された 2 次曲面の多面体近似をおこなう方法を示す.

本手法により曲面からの距離を一定値以下に保証しつつ, 少ないポリゴン数で多面体近似することが可能となる.

2 2 次曲面と近傍点の距離

本研究では多面体近似を, 多面体の頂点と曲面との距離を評価量としておこなう. この距離の算定には高次方程式を解く必要がある. そこで, この距離 d を最小 2 乗法の誤差算定式を用いて近似的に求めた.

距離 d は, 曲面近傍の点 $R(R_x, R_y, R_z)$ と曲面上の点 (x, y, z) との距離の最小値となる (図1参照). よって

$$d = min(\sqrt{(x-R_x)^2 + (y-R_y)^2 + (z-R_z)^2})$$

となる.

ここで条件つき最小 2 乗法の誤差算定式 D は

$$D = (x-R_x)^2+(y-R_y)^2+(z-R_z)^2+2\lambda f(x,y,z) \quad (1)$$

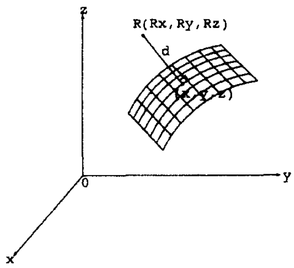

図 1 曲面と近傍点の距離

となる. この算定式 D を最小とする (x, y, z) が点 R に最も近い曲面上の点となる.(ただし $f(x, y, z)$ は曲面の陰関数表現) ここで $x - R_x$, $y - R_y$, $z - R_z$ をそれぞれ δ_x, δ_y, δ_z とすると式 (1) は

$$D = \delta_x^2+\delta_y^2+\delta_z^2+2\lambda f(\delta_x+R_x, \delta_y+R_y, \delta_z+R_z) \quad (2)$$

となる. 距離 d を最小化するためには,

$$\frac{\partial D}{\partial \delta_x}=0, \frac{\partial D}{\partial \delta_y}=0, \frac{\partial D}{\partial \delta_z}=0, \frac{\partial D}{\partial \delta_\lambda}=0 \quad (3)$$

となればよい. よって式 (3) をそれぞれ第 1 次項まで展開すると以下の 4 つの式が求まる.

$$\frac{\partial D}{\partial \delta_x} = 2\delta_x + 2\lambda f_x(R_x, R_y, R_z) = 0,$$
$$\frac{\partial D}{\partial \delta_y} = 2\delta_y + 2\lambda f_y(R_x, R_y, R_z) = 0,$$
$$\frac{\partial D}{\partial \delta_z} = 2\delta_y + 2\lambda f_y(R_x, R_y, R_z) = 0,$$
$$\frac{\partial D}{\partial \lambda} = f(R_x, R_y, R_z) + \delta_x f_x(R_x, R_y, R_z)$$
$$+\delta_y f_y(R_x, R_y, R_z) + \delta_z f_z(R_x, R_y, R_z) = 0.$$

この 4 式を連立して $\delta_z, \delta_y, \delta_z, \lambda$ について解き, 式 (1) に代入すると曲面と近傍点の距離 d が以下のように求まる.

$$d = \frac{f(\mathbf{R})}{\sqrt{(f_x(\mathbf{R}))^2 + (f_y(\mathbf{R}))^2 + (f_z(\mathbf{R}))^2}},$$

ただし $\mathbf{R} = (R_x, R_y, R_z)$ とする.

A Method of Polygon Approxiation of Free-form Surface and Its Application
Toru SHIMIZU, Tsuyoshi SAITOH
(Tokyo Denki Univ.,2-2 Kanda,Chiyoda-ku,Tokyo,101)

3　2次曲面の分割

3.1　分割手順

第2節で求めた式を用いて曲面からの距離が一定値以下になる多面体で2次曲面の多面体近似をおこなう．その大まかな手順を以下に示す．

1. 曲面の分割領域を決める (図2左上).
2. 曲面上の一点を定め, その点における接平面を求める.
3. 接平面と交わる既存の面を修正し, 接平面の各頂点を求める. この接平面を既存面に追加する (図2右上).
4. 接平面の各頂点と曲面との距離を求める. この距離が評価量と比較し,
   - 大きいとき, この頂点から面に降ろした垂線の足における接平面を求める. この接平面を新たな分割面として再帰的に3. 以降の処理を実行する (図2下).
   - 小さいとき, この頂点は条件を満たしているので再分割をおこなわず処理を終了する.

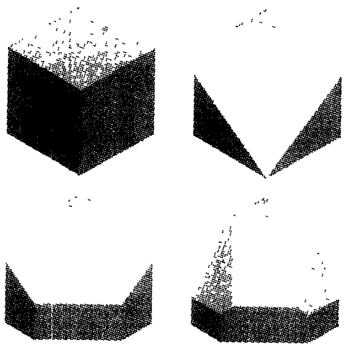

図2　2次曲面の分割

以上の再帰処理により曲面が多面体近似される.

3.2　結果

第3節で述べた方法で実際に2次曲面を多面体近似した結果を図3に示す.

図3(a) は凸曲面である楕円体を,(b) は凹曲面である二葉双曲面を多面体近似したものである.

描画結果を見ると曲率の小さな部分では大きなポリゴンで近似され, 曲率の大きな部分では小さなポリゴンで近似されていることがわかる. このように本手法では曲面の形状にそった近似をおこなうことが出来る.

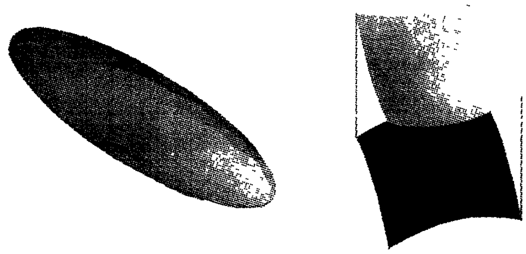

図3　(a) 楕円体　　(b) 二葉双曲面

また各ポリゴンの頂点と曲面との距離を計算したところすべての点において評価量以下となっていることが確認できた.

4　本多面体近似方法の評価

本近似方法では以下のような特徴が上げられる.

- 一般的な多面体近似では, 各ポリゴン頂点が曲面上の点となるのに対し, 本手法による近似ではポリゴンが曲面の接平面となる. このため凸の曲面の多面体分割では曲面を外包した形となり, 凹の曲面では内接した形となる.
- 曲面形状に依存した近似となり, 少ないポリゴン数で目的の精度を満足した形状近似がおこなわれる.
- 各面は多辺形ポリゴンとなる. このため少ないポリゴン数での近似が可能である. また三角形ポリゴンへの分割も容易になり専用ハードウェアによる高速な描画も可能となる.

5　おわりに

本報ではまず2次曲面と近傍点の距離を近似的に求める方法を説明し, この距離を評価量とする2次曲面の多面体近似の方法を示した. 本手法により曲面との距離が評価量以下であることを保証したポリゴンによる多面体近似が可能であることを示した.

今後は自由曲面の多面体近似をおこなう. 具体的には自由曲面を2次曲面に近似し, その2次曲面を多面体近似するという方法により自由曲面の多面体近似をおこなう.

参考文献

1)Foley.J.D:「Computer Graphics」Addison Wesley,1990
2) 穂坂 衛:「CAD/CAM における曲線曲面のモデリング」, 東京電機大学出版局,1996