4Q－13

4次元円柱型線素を持つ擬リーマン多様体のストリームリボンによる可視化

佐藤哲　岩佐英彦　竹村治雄　横矢直和
奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科

1　はじめに

不可視な概念である「場」を表現することは、科学的可視化の分野で重要なテーマとなっている。その中で、重力場を対象にしたものとして、山下による重力場光線追跡法によるもの [1] や Bryson らによる仮想現実空間に測地線を描いたもの [2] などがある。筆者らは動画と重力場光線追跡法を用いての重力場の可視化 [3] や流体のベクトル場による重力場の表現 [4] などの研究を行なってきた。ところが一般に光線追跡法は、正確な画像を作成できる反面計算に時間がかかるという欠点がある。また測地線やベクトル場を用いる方法では、重力による空間の捻れや歪みが十分に表現できない。そこで、歪んだ空間を高速かつ十分に表現するためストリームリボン [5] を用いた可視化を検討する。ストリームリボンは面を持つので、面の向きによって重力により引き起こされる空間の捻れを表現することができる。また、光線追跡法とは異なり空間内のあらゆる地点での計算を行なう訳ではないので、計算時間が短くなることも特徴である。本稿では重力場の可視化を念頭に置いているので、重力場の数学的表現であるリーマン多様体について簡単に説明し、ストリームリボンを用いた重力場の可視化について述べる。

2　リーマン多様体による円柱型重力場の表現

多様体とは、空間の概念を拡張したもので、座標系によって覆われている。正定値の内積が与えられている多様体をリーマン多様体と呼ぶが、一般相対性理論によると重力場を記述するには内積が不定値であることが要請されるので、本研究では内積が負になり得る擬リーマン多様体を対象とする。

一般にリーマン多様体上にて、微小な二点間の距離の自乗は

$$ds^2 = \sum_{i,j=0}^{3} g_{ij} dx^i dx^j$$

と表される。ここで ds は線素、g_{ij}は計量テンソルと呼ばれる。計量テンソルは微分幾何学では基本変数で、計量テンソルによって空間の性質が決定される。$g_{ij} = g_{ji}$であることを考慮すると 4 次元空間の計量テンソルは 10 個の成分を持つが、もし多様体になんらかの対称性を仮定するとその数は大幅に減る。ここでは宇宙ひも [6] による無限円柱状重力場のような円柱対称性を仮定し、線素と計量テンソルを次のように定義する。

$$ds^2 = -\left(1-\frac{r_g}{r}\right)d\tau^2 + \left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 \quad (1)$$

ここで、r_gは定数である。τは時間を、(r,θ,z) は三次元円柱座標系を表しているとみなすと、この多様体は無限に長い円柱状のブラックホールと考えることができる。この場合、定数r_gはブラックホール半径と呼ばれる。

3　ストリームリボンによる重力場の可視化

ストリームリボンは、幅を持つ2次元多様体である。1次元多様体である空間曲線より情報量が多く、ある地点で強さ、向き、捻れなど多くの情報量を持つ重力場の可視化に適している。

式 (1) で表される計量テンソルより測地線の方程式を求めると、アフィンパラメータを s として次のような微分方程式群が得られる。

$$\frac{d\tau}{ds} = c_1\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1} \quad (2)$$

$$\frac{d^2r}{ds^2} = -\frac{r_g c_3^2}{2r^2} + \frac{c_2^2}{r^3} - \frac{3}{2}\frac{c_2^2 r_g}{r^4} \quad (3)$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{c^2}{r^2} \quad (4)$$

$$\frac{dz}{ds} = c_3 \quad (5)$$

ここで、c_1, c_2, c_3は積分定数である。これらの式を常微分方程式の初期値問題として数値的に解くことで、4 次元空間内の座標$\boldsymbol{r} = (\tau, r, \theta, z)$ を得ることができる。また、速度ベクトルを$\boldsymbol{e}_1 = (d\tau/ds, dr/ds, d\theta/ds, dz/ds)$ とおくと、数値微分により加速度ベクトル$\boldsymbol{e}_2 = d\boldsymbol{e}_1/ds$が計算できる。さらに従法線ベクトルを$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1$と計算する。今回のストリームリボンは、この$\boldsymbol{e}_1$と$\boldsymbol{e}_3$によって張られる平面を接平面とするものと定義する（図 1)。

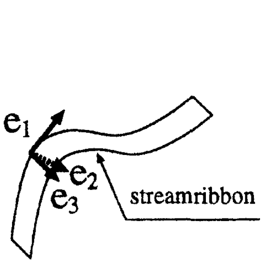

図 1: ストリームリボン

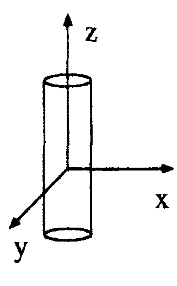

図 2: 座標系

Visualization of Semi-Riemannian Manifold Characterized as Four-dimensional Cylindrical Line Element by Stream-ribbon

Tetsu Satoh, Hidehiko Iwasa, Haruo Takemura and Naokazu Yokoya
Nara Institute of Science and Technology (NAIST)
8916-5 Takayama, Ikoma, Nara 630-01, Japan

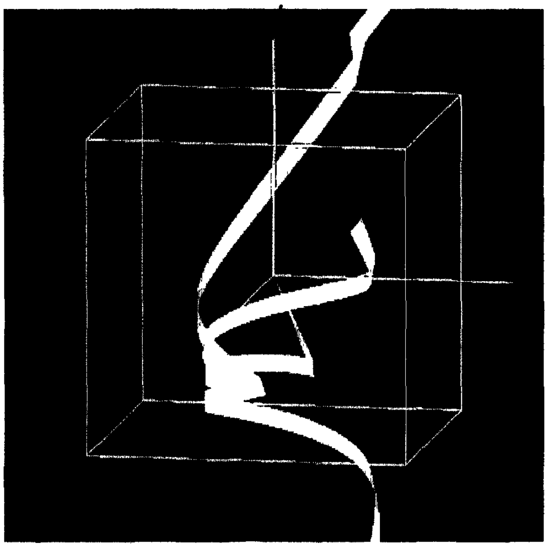

図 3: z軸からの距離 $r = 1.7$ の地点から、z軸に対する速度 $dr/ds = -0.5$ でリボンを 4 本発射した場合

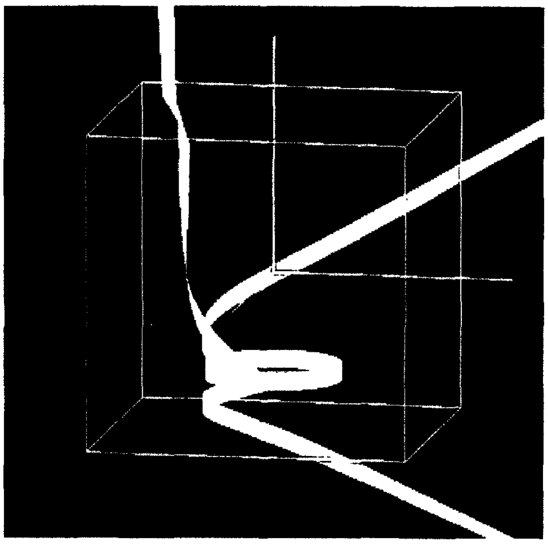

図 4: z軸からの距離 $r = 1.5$ の地点から、z軸に対する速度 $dr/ds = 0.0$ でリボンを 4 本発射した場合

4 実験結果

本節では、擬リーマン多様体によって記述された円柱型の重力場の周囲に光の軌道を描くストリームリボンを発射し、そのリボンの振舞いによって重力で歪んだ空間を表現する方法について述べる。以下の実験では、簡単のためブラックホール半径を表す定数r_gを 1 とおく。式 (1) で表される計量テンソルでは、r_gと rの比が問題なので、こう置いても一般性は失われない。座標系は図 2のように取り、z軸方向に円柱型多様体が置かれている。リボンは捻れが良く分かるように、裏表の色を変えている。

図 3は z軸からの距離 $r = 1.7$ の地点から、z軸方向の速度 dz/ds の値を各 2.0, 1.0, 0.0, -1.0 とした 4 本のリボンを流した様子である。わずかに z軸に向かうような初期速度を与えている。光は平坦な空間では直進するが、円柱型重力場の中では重力のために z軸の周囲を回転しながら軸から離れていくという曲線軌道を描く。

図 4は $r = 1.5$ で r方向の速度をゼロとした場合である。つまり、円柱の接線方向に向かって発射している。dz/ds の値は各々2.0, 1.0, 0.0, -1.0 である。z軸方向の初期速度がゼロの場合はリボンが重力に捉えられて軸の周りを回る円軌道を描いている。ところが z軸方向の初期速度が存在する場合は、重力を振り切って無限遠方に発散している。これは式 (3) の第 1 項の影響によるものである。また、最も z軸方向の速度が大きい場合は、簡単に重力場から逃れることができずに捻れながら z軸に沿って進んでいる様子が分かる。

実装にはカリフォルニア大学バークレー校で開発されているオブジェクト指向言語 Sather を用い、OpenGL と Sather のインターフェース、ストリームリボンや円柱状多様体のクラスライブラリなどを作成した。微分方程式の数値解法には Runge-Kutta-Fehlberg 法（刻幅適応変化法）を、数値微分には差分法を用いた。プラットフォームは主に SGI Indigo2（CPU R4400、メインメモリ 64Mb）を使用した。実行時間は、図 3、4共に約 1 秒である。また、本実験では静的な重力場を対象としたためr軸を取り除いた例を紹介したがこれは必然的なものではなく、本システムは 4 次元座標系の中から任意の 3 軸を取り出して可視化することができる。

5 おわりに

本稿では、重力場のような歪んだ空間を表現するためにストリームリボンを用いた可視化手法を提案し、重力により歪んだ空間での光線の運動を表す画像を高速に生成できることを確認した。

今後は本手法を拡張し、より一般的な多様体を扱えるクラスライブラリの作成を行ない、複雑な空間の可視化を試みる予定である。

参考文献

[1] 山下義行, “ブラック・ホールのコンピュータ・グラフィックス：光線追跡法の曲がった 4 次元時空への拡張”, 情処学論, Vol.30, No.5, pp.642-651, 1989.

[2] S.Bryson and M.Gerald-Yamasaki, The Distributed Virtual Windtunnel, *Proc. Supercomputing'92*, pp.275-285, 1992.

[3] 佐藤哲, 岩佐英彦, 竹村治雄, 横矢直和, 物体の相対論的運動の重力場光線追跡法による可視化, 信学技法, IE95-126, 1996.

[4] T.Satoh, H.Iwasa, H.Takemura and N.Yokoya, Visualization of Black Hole Based on Computational Relativistic Fluid Dynamics, *Proc. Pacific Symposium on Flow Visualization and Image Processing*, 1997.

[5] S.-K.Ueng, C.Sikorski and K.-L.Ma, Efficient Streamline, Streamribbon, and Streamtube Constructions on Unstructured Grids, *IEEE Trans. Visualization and Computer Graphics*, Vol.2, No.2, pp.100-110, 1996.

[6] A.Vilenkin, Cosmic Strings and Domain Walls, *Physics Reports(Review Section of Phys. Lett.)*, 121, No.5, pp.263-315, 1985.