

曲率連続な対数らせんスプライン補間曲線

黒田 満† 倉賀野 哲造†† 久保 哲 夫†††

曲率半径が弧長の折れ線グラフとなる滑らかな対数らせんスプライン補間曲線の導出法を提案している。曲線はスパン曲線長、与点での曲率半径と接線を未知数とする連立方程式を、パラメトリック3次の C^2 補間曲線からの良い初期値を使ってニュートン・ラフソン法で解いて導く。提案手法は計算機援用の形状設計に有用な次の特長を持っている。(1) 弧長、接線、曲率半径といった、設計者の直観になじむ幾何情報だけから形状を設計・制御できる。(2) 縮閉線がまた対数らせんスプライン曲線となるし、オフセット曲線と伸開線も対数らせんスプライン曲線で精度良く近似できるので取り扱いやすい。(3) 必要なら、導出曲線を許容誤差範囲内で有理多項式近似できる。さらに、クロソイド弧の挿入による変曲点の導入や1スパンを複数曲線分化して表現力を強化する拡張法についても簡単に述べている。

Logarithmic Spiral Spline Interpolant with Curvature Continuity

MITSURU KURODA,[†] TETSUZOU KURAGANO^{††} and TETSUO KUBO^{†††}

This paper presents a method for constructing an interpolating smooth curve composed of logarithmic spirals, whose radius of curvature is piecewise linear with respect to arclength. Using good initial values from the conventional cubic C^2 interpolant, the curve is obtained by the Newton-Raphson method from a system of equations whose unknowns are arclengths of spans, tangents and curvature radii at data points. The method has the following three features for computer aided geometric design. (1) It specifies and controls shape of curve by intrinsic geometric quantities familiar with designers, such as arclength, tangent and radius of curvature. (2) Its evolute is also expressed by logarithmic spiral spline curve, and its offset curve and involute are approximated very well by logarithmic spiral spline curve and hence these associate curves are easy to deal with. (3) The derived curve might be approximated within a tolerance by conventional rational polynomials, if necessary. Extensions of the method are described for introducing an inflection point by use of a clothoid segment and for making the curve more flexible by multi segments per span.

1. はじめに

計算機援用の形状設計(CAGD)の分野では曲率が単調な、あるいは少数の単調な部分からなる曲線が美しい¹⁾として好まれている。そのような曲線の1つである「らせん」、なかでもCornuらせん(クロソイド曲線)は曲率が弧長の線形関数となるためにCAGDの初期から注目された²⁾。

そして弧長、接線、曲率といった人の直観でとらえやすい、本来の幾何情報だけから形状設計できるクロソイドスプラインが、補間曲線をスパンごとに逐次に伸

ばしてゆく簡単な方法から曲率自乗積分(エネルギー)を最小化する複雑な非線形スプラインまで、広く研究された^{3)~8)}。しかし、それぞれに一長一短あって必ずしも利用しやすい方法があるとはいえなかった⁹⁾。そこで著者らは曲率を弧長パラメータの B -スプラインで表して、曲率空間で B -スプライン手法を使う補間曲線を汎用数式処理システム^{*}を用いて手軽に導く方法を示した⁹⁾。

一方、Baumgartenら¹⁰⁾は「曲率半径が弧長の区分線形関数となる」曲線が滑らかであるとして、対数らせん弧を用いた曲線を研究している。曲率半径が弧長に比例する対数らせんは単純な機構によって生成できる¹¹⁾。また、形を変えない連続的成長の跡としてオオム貝やカタツムリの殻等に見られる¹²⁾ために、古くから多くの人の注目を集めてきた。Baumgartenら¹⁰⁾

† 豊田工業大学工学部
Faculty of Engineering, Toyota Technological Institute
†† ソニー株式会社
B & P Co., Sony Corp.
††† クボテック株式会社
CEO, Kubotek Ltd.

* いわゆる「数式電卓」として広く普及してきている。

は両端点とそこでの接線から対数らせん弧を決定し、これを精度良くパラメトリック有理3次式あるいは有理3次スプライン近似する方法を提案している。したがって、与点列から各点での接線方向を推定できれば接線連続な対数らせんスプライン補間曲線を導くことができる。しかし、このような構成では、せっかく対数らせんを使いながら肝心の曲率半径が区分線形関数となる、曲率連続な補間曲線を導くことはできない。

そこで本研究では、曲率連続な対数らせんスプライン補間曲線を新たに定式化して、ニュートン・ラプソン法を使ってこの曲線を導く方法を提案する。クロソイドスプライン曲線と同様に、弧長、接線、曲率半径といった直観になじむ量だけから形状を設計・制御できるほかに、縮閉線、オフセット曲線、伸開線といった随伴曲線を同じ対数らせんスプライン曲線によって記述、あるいは精度良く近似できる取り扱いやすい手法である。また、導出曲線は許容誤差範囲内で有理3次式近似できる¹⁰⁾ので、従来のパラメトリック曲線との整合性も良い。さらに、変曲点の導入や表現力を強化するための拡張法も示す。

以下、まず本研究に関連する対数らせんの基本的性質を述べた後、平面曲線の弧長による表現に基づいて曲率連続な対数らせんスプライン補間曲線を定式化して、その解法について述べる。そして、いくつかの境界条件を満たす曲線を具体的に導いて本曲線の基本的性質を明らかにする。次に、本曲線の随伴曲線の中で実用上重要なオフセット曲線、縮閉線、伸開線が対数らせんスプライン曲線によって簡単に取り扱えることを述べる。続いて、本曲線の拡張について述べる。

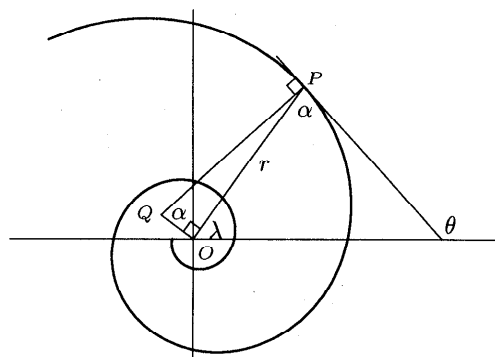
2. 対数らせん

対数らせんは、デカルトが最初(1638年)に認識したといわれている¹²⁾。いま極座標表示の点 $(a, 0)$ を、1ラジアン回転にともなって μ 倍に拡大するということにして連続的に λ ラジアン回転拡大変換すると、点 $(\mu^\lambda a, \lambda)$ に移る。これが対数らせんで、次のように表すことができる。

$$r = a\mu^\lambda = ae^{\lambda \cot \alpha}, \quad \log_e \mu \equiv \cot \alpha.$$

拡大係数 μ は一定なので図1のように曲線上の点への位置ベクトルと接線のなす角 α が一定となる。このため、対数らせんは等角らせんとも呼ばれる。このように回転拡大によって生成される対数らせんは、生物が形を変えないで連続的に成長を遂げた結果として日常的に見られる。

図1でPにおける曲率円とPOの延長との交点を



$$r = e^{0.211085\lambda}, \quad 7\pi \leq \lambda \leq 10.7\pi$$

図1 対数らせん

Fig. 1 Logarithmic spiral.

P'とする。PP'によって切り取られる円弧の上に立つ中心角は 2α となるが、 $\angle PQP' = 2\alpha$ なのでQはこの円の中心であることが分かる。したがって、曲率半径 ρ は次のように書ける。

$$\rho = r \operatorname{cosec} \alpha.$$

また、曲率は接線(とx軸との成す)角 θ を弧長sで微分して得られるので、次のように変形できる。

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\lambda}{ds} = \frac{d\lambda}{dr} \frac{dr}{ds} = \frac{\tan \alpha}{r} \frac{dr}{ds},$$

$$\frac{dr}{ds} = \cos \alpha: \text{一定.}$$

したがって、rは弧長の1次式で表され、曲率半径が弧長に比例して変化することが分かる。

また、 α が一定なので、この対数らせんを回転させて点QでQPに接するようにできる。このことから曲率中心の軌跡(縮閉線)がもとのらせんを適当な角だけ回転させたものとなっていることが分かる。もし図1でたとえば $\tan \alpha = 0.27441$ とすれば、対数らせんは回転させることなく自身が伸開線でありまた縮閉線となる。このように対数らせんは形状設計のための際立った特長を備えている。

3. 対数らせんスプライン補間曲線

ここでは対数らせん弧(あるいは曲線分と呼ぶ)を次々に接続して(弧長に関して2階微分連続(C^2)な、すなわち G^2 連続¹⁾な補間曲線を得るために、すべての曲線分を1つのデカルト座標で表して関連する方程式を導く。以下ではベクトルを表す記号には肉太文字を使う。

3.1 未知数と方程式

一般に平面曲線rは次のように表される。

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0 + \int_0^s \begin{pmatrix} \cos \theta(s) \\ \sin \theta(s) \end{pmatrix} ds. \quad (1)$$

ここで $\theta(s)$ は接線角で, s は始点 \mathbf{r}_0 からの弧長である. 曲線 \mathbf{r} と単位接線ベクトル \mathbf{t} , 単位法線ベクトル \mathbf{n} および曲率半径 ρ とは次の関係にある.

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\theta(s)}{ds} \mathbf{n} = \frac{1}{\rho(s)} \mathbf{n}. \quad (2)$$

我々は曲線 \mathbf{r} が次のように弧長 s_i で与点 \mathbf{p}_i を接線角 θ_i で通過するものとする.

$$\mathbf{r}(s_i) = \mathbf{p}_i, \theta(s_i) = \theta_i, i = 0, 1, \dots, n. \quad (3)$$

1 次の B-スプラインで表される曲率半径グラフに次のような節点多重度¹⁾ベクトル \mathbf{m} を与える. m_i は 1 または 2 の値をとり, 1 のとき曲線は $\mathbf{r}(s_i)$ で曲率半径が連続, 2 のとき不連続となる.

$$\mathbf{m} = \{m_0, m_1, \dots, m_n\}, m_0 \equiv m_n \equiv 1. \quad (4)$$

そして次式 (5) によって計算される k_i に従って, i 番目の曲線分の曲率半径が ρ_{k_i} から ρ_{k_i+1} へ線形に変化するものとする.

$$k_i = \sum_{j=0}^i m_j - 1, i = 0, 1, \dots, n. \quad (5)$$

式 (1) において θ を与えれば曲線形状が決まる. そして式 (2) によれば θ は曲率を弧長で積分したものである. 対数らせんでは曲率半径が弧長の線形関数となるために接線角 θ は曲率を積分して次のようになる. 以下, 前進差分演算子 Δ を $\Delta h_i = h_{i+1} - h_i$ のように用いる.

$$\begin{aligned} \theta(s) &= \theta_i + \int_{s_i}^s \frac{ds}{(1-t)\rho_{k_i} + t\rho_{k_i+1}} \\ &= \theta_i + \frac{\Delta s_i}{\Delta \rho_{k_i}} \log_e \left(1 + \frac{\Delta \rho_{k_i} t}{\rho_{k_i}} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

$$t = \frac{s - s_i}{\Delta s_i}, s_i \leq s \leq s_{i+1}, i = 0, 1, \dots, n-1.$$

本論文で対象とするらせん弧 ($\Delta s_i \neq 0$) では必ず $\Delta \rho_i \neq 0$ である. 式 (1) で, 積分変数 s を θ に変換して積分するために式 (6) を次のように書き換えて $ds/d\theta$ を求める.

$$e^{\frac{\Delta \rho_{k_i}}{\Delta s_i} (\theta - \theta_i)} = 1 + \frac{\Delta \rho_{k_i}}{\rho_{k_i}} \frac{s - s_i}{\Delta s_i}.$$

そして次のような曲線分の表現式を得る.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(s) &= \mathbf{p}_i + \rho_{k_i} \frac{\Delta s_i}{(\Delta s_i)^2 + (\Delta \rho_{k_i})^2} \{ \mathbf{g}(i, \theta) \\ &\quad - \mathbf{g}(i, \theta_i) \}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(i, \theta) &\equiv \\ &e^{\frac{\Delta \rho_{k_i}}{\Delta s_i} (\theta - \theta_i)} \begin{pmatrix} \Delta \rho_{k_i} \cos \theta + \Delta s_i \sin \theta \\ \Delta \rho_{k_i} \sin \theta - \Delta s_i \cos \theta \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$s_i \leq s \leq s_{i+1}, i = 0, 1, \dots, n-1.$$

そこで次のように未知数を定めて方程式を導くことができる.

$$\text{未知数: } \begin{cases} \{\rho_i, i = 0, 1, \dots, k_n\}, \\ \{\Delta s_i, i = 0, 1, \dots, n-1\}, \\ \{\theta_i, i = 0, 1, \dots, n\}, \end{cases}$$

方程式:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_{2i} \\ f_{2i+1} \end{pmatrix} &\equiv \rho_{k_i} \Delta s_i \{ \mathbf{g}(i, \theta_{i+1}) - \mathbf{g}(i, \theta_i) \} \\ &\quad - \{ (\Delta s_i)^2 + (\Delta \rho_{k_i})^2 \} \Delta \mathbf{p}_i = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$i = 0, 1, \dots, n-1.$$

$$f_{2n+i} \equiv \Delta s_i \log_e \frac{\rho_{k_i+1}}{\rho_{k_i}} - \Delta \theta_i \Delta \rho_{k_i} = 0, \quad (10)$$

$$i = 0, 1, \dots, n-1.$$

式 (9) は曲線が与点を補間する条件, 式 (10) は接線角の連続条件である. 式 (10) で未知数 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ を次々と θ_0 によって表してゆけば未知数と方程式の数を減らすことができる. しかし, 残った式が複雑な非線形の式となって, かえって解法に時間がかかるのでこのような構成にしている. 具体的な計算時間の比較は, 後ほど曲線例の中で示す.

3.2 曲線の導出

方程式の解法を示すために未知数に次のような別名をつけてベクトル \mathbf{u} としてまとめて表す.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\equiv (u_0, u_1, \dots, u_{k_n+2n+1})^t \\ &\equiv (\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{k_n}, \Delta s_0, \Delta s_1, \dots, \Delta s_{n-1}, \\ &\quad \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n)^t. \end{aligned} \quad (11)$$

未知数の数が $k_n + 2n + 2$ 個で方程式の数が $3n$ 個である. もし曲線が完全に曲率連続であれば $k_n = n$ となるのであと 2 個までの拘束条件を付加することができる. 特別な場合として 1 曲線分のみ ($n = 1$) のときを考えると, 式 (9), (10) より Δs_0 を消去して両端の接線, 曲率半径の中からいずれか 2 つを指定して解くことができる¹⁰⁾.

曲率不連続点を 1 個増すごとに拘束条件を 1 個追加することができる. もちろん, 多くの場合にこのような不連続点で曲線を 2 つに分けて取り扱うこともできる. 拘束条件としては, たとえば, 通過点における接線 (θ_i) や曲率 ($1/\rho_i$)・曲率半径 (ρ_i) 等を陽に指定することやそれらの間の関係を与えることができる. たとえば, 隣接する 2 曲線分にわたって曲率半径が線

形に変化する関係を与えて2曲線分を1つのらせん弧にまとめる条件を与えることができる. このようにして与えるすべての独立な拘束条件を次のようにまとめて表すことにする.

$$f(\mathbf{u}) \equiv (f_0, f_1, \dots, f_m)^t = 0, \quad (12)$$

$$m \leq k_n + 2n + 1.$$

我々は未知数 \mathbf{u} に関するこの非線形連立方程式 (12) をニュートン法 (13) で解く. このとき, 汎用数式処理システムを用いればヤコビアン J を容易に計算できる. また, パラメトリック3次の C^2 補間曲線から良い初期値 $\mathbf{u}^{(0)}$ を利用することができる. したがって Baumgarten ら¹⁰⁾ のように各曲線分ごとに境界条件を分類してすべての可能な解を検討する必要はない.

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{(i+1)} = \mathbf{u}^{(i)} - J^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{u}^{(i)}), \\ J \equiv \frac{\partial (f_0, f_1, \dots, f_m)}{\partial (u_0, u_1, \dots, u_{k_n+2n+1})} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^{(i)}} \end{cases} \quad (13)$$

もし拘束条件が足りなくて $m < k_n + 2n + 1$ のときには, デフォルトの拘束条件をパラメトリック3次の C^2 補間曲線等から設定してもよいし, J の逆行列を非正方のムーアペンローズ一般化逆行列¹³⁾で置き換えてもよい. この一般化逆行列は恒等行列を I として $JJ^{-1} - I$ の全要素の2乗和を最小にするという良い性質を持っている. これまでの経験からするとニュートン法の繰返し計算は3回から5回までに収束する. 解を得たら式 (7) に従って各曲線分を生成することができる. 参考までに汎用数式処理システム Mathematica^{*} によるプログラムを筆頭著者のホームページ^{**}上に公開している.

4. 曲線例

本手法による基本的な曲線生成例をその曲率半径グラフとともに示す. 上が曲線で, 下が対応する曲率半径グラフである. 白丸は与通過点で, 小さい黒丸は対応する縮閉線上の点である. 曲率半径グラフでは横軸に弧長をとり, 節点位置に目盛を付けて小数点以下2桁目で四捨五入した値を付している. ただし, 数字が重なって読みにくくなる場合には終端値 (曲線長) のみを付している.

図2 (a) は最もポピュラーな従来のパラメトリック3次の C^2 補間曲線である. 本手法ではこの曲線から初期値を採取している. この曲線の曲率グラフは Baumgarten らがいう好ましい条件「区分線形」には

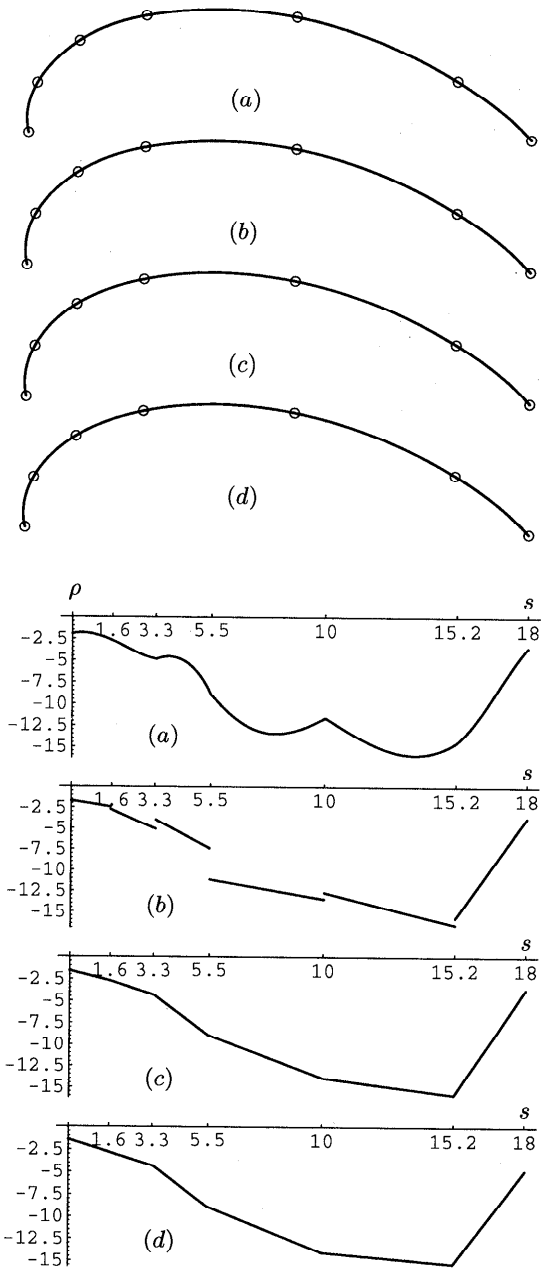


図2 曲線と曲率半径グラフ: (a) パラメトリック3次の C^2 補間曲線, (b) 各通過点で (a) と同じ接線を持つ G^1 曲線, (c) 両端で (a) と同じ接線を持つ G^2 曲線, (d) 最初の2曲線分を1曲線分にまとめた G^2 曲線

Fig. 2 Curves and their curvature radii: (a) Parametric cubic C^2 interpolant, (b) G^1 curve with the same tangents at data points as (a), (c) G^2 curve with the same tangents at the end points as (a), (d) G^2 curve whose 1st and 2nd segments are a single spiral arc.

* Wolfram Research, Inc.

** <http://www.toyota-ti.ac.jp/people/kuroda>

ほど遠い。(b)は各通過点で(a)と同じ接線を持つ接線連続(G^1)な本曲線である。この曲線はBaumgartenらの方法によっても生成できる。曲率半径は通過点で不連続となり、特に4番目の通過点で大きなギャップを持っていて好ましくない。(c)は両端で(a)と同じ接線を持つ本手法における曲率連続な曲線である。(d)は最初の2曲線分を1個の対数らせん弧とする制約を課した曲率連続な本曲線である。曲率半径グラフ(c)と(d)は区分線形かつ単峰性の好ましい関数となっていることが分かる。この点列に対して境界条件を与えないで一般化逆行列を使って生成した曲線例については次章で述べる。この点列データに対する曲線の計算時間は、有効数字16桁(Mathematicaのデフォルト値)で計算し、ニュートン法の繰返し5回で5桁まで収束し7秒(Sun-4/SPARC 10, 40 MHz)であった。3.1節の最後で述べたように、未知数と方程式の数を

減らして計算すると、繰返し7回で6桁まで収束し64.2秒であった。およそ9倍も計算時間がかかることになる。

図3に別の曲線例を示す。曲率半径グラフだけでは分かりにくいので縮閉線も描き、通過点での曲率半径も図示している。曲率半径の大きさに加えて法線方向も分かって都合がよい。縮閉線は第1種の尖点¹¹⁾を2個持っているが、これは楕円、放物線、双曲線等にも見られる特異点で、滑らかさを損なうものではない。曲率半径グラフを見ているともう少し曲率半径の推移を制御できそうに思えるが、与通過点位置を勝手に動かすのでなければ不可能であろうということが、曲線や縮閉線の形状から分かる。

以上の例とほかに試みた多くの例から判断して、曲率半径が線形に変化するように制約を受けた曲線分が、与点を補間するように制御されて変曲点を生じない本曲線は、制御の余地がほとんどない滑らかな曲線を生成すると考える。厳しい美的意匠要求のある形状設計分野では曲率プロファイルの制御が必須で、「デザイナーは目視によって曲率プロファイルの変化を認識できる」という実験報告がなされている¹⁴⁾。本手法はこのような分野での使用に適していると考えられる。本曲線の拡張については6章で簡単に述べる。

5. 随伴曲線

随伴曲線であるオフセット曲線、縮閉線、伸開線は形状設計および加工、あるいは曲線の品質・性質を知るために使われる。従来のパラメトリック曲線ではこれらの随伴曲線を簡単なパラメトリック曲線として表すことができないために、数値的に求めるか、許容誤差範囲内で有理多項式近似している。

一方、対数らせんの縮閉線は元の対数らせんを適当な角だけ回転したものであった。したがって、本曲線の縮閉線は対数らせんスプライン曲線である。しかも両曲線の対応する曲線分の曲率半径の変化率は等しいという性質を持っている。後ほど、オフセット曲線は伸開線の1つであること、そして伸開線は本曲線で精度良く近似できることを示す。したがって、これらの随伴曲線を対数らせんスプライン曲線で表して容易に取り扱うことができる。あるいは本曲線の接線角は簡単な式で表されるので以下のように定義式どおりに扱ってもよい。オフセット曲線間の干渉処理等を解析的な式の助けによって処理できる。

縮閉線は曲率中心の軌跡として法線方向と曲率半径を同時に図示できるので、曲線の品質を手軽に確認する手段として利用されている¹⁴⁾。曲線 $r(s)$ の縮閉線

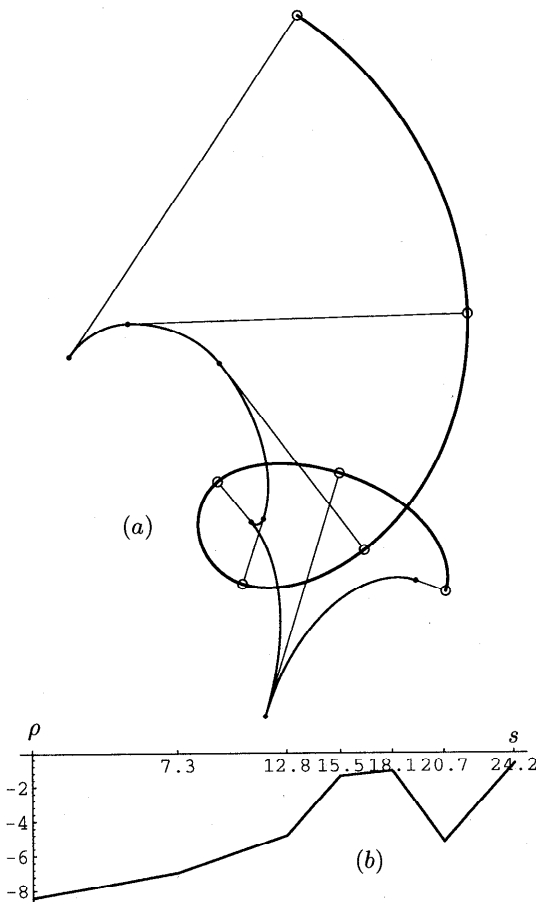


図3 (a) 本曲線とその縮閉線, (b) 曲率半径グラフ
Fig. 3 (a) Proposed curve and its evolute, (b) Curvature radius of the curve.

$r_E(s)$ は次式である.

$$r_E(s) = r(s) + \rho(s) \begin{pmatrix} -\sin \theta(s) \\ \cos \theta(s) \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$\rho(s) = (1-t)\rho_{k_i} + t\rho_{k_{i+1}}, \quad t = \frac{s-s_i}{\Delta s_i},$$

$$s_i \leq s \leq s_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

縮閉線からみた元の曲線は伸開線である. 曲線 $r(s)$ の伸開線 $r_I(s)$ は次式となる.

$$r_I(s) = r(s) + (c-s) \begin{pmatrix} \cos \theta(s) \\ \sin \theta(s) \end{pmatrix}. \quad (15)$$

任意定数 c にいろいろな値を与えると平行な幾本もの伸開線族を得る. この1つは他の1つのオフセット曲線である.

望ましい曲線の曲率半径プロファイルを縮閉線として与えておいてその伸開線として所望の曲線を導く方法がある¹⁴⁾. 東らは縮閉線を有理 Bézier 曲線で与えてその曲線長を制御するために苦勞しているが, 曲線長を未知数にできる本曲線を使えば手法を簡単化できると考える. 今後の課題としたい.

曲線 $r(s)$ を w だけオフセットした曲線 $r_O(s)$ は次のように表すことができる.

$$r_O(s) = r(s) + w \begin{pmatrix} -\sin \theta(s) \\ \cos \theta(s) \end{pmatrix}. \quad (16)$$

図4に図2と同じ通過点列に対して一般化逆行列を使って生成した本曲線とその随伴曲線例を示す. 縮閉線と伸開線は式(14), (15)による曲線とそれらに対数らせんスプライン曲線で表した, あるいは近似した曲線を重ねて描いている. 目視では重ねた曲線の差異を確認できないほど一致していて, よく近似できていることが分かる. オフセット曲線は縮閉線の伸開線として描いてみた. パラメータ c の値は次のようである.

$$c = 2\rho_0, 1.5\rho_0, 0.5\rho_0. \quad (17)$$

本曲線の伸開線ができるだけ対数らせんスプライン曲線に近くなるように最初の曲線分が対数らせん(弧長が本曲線の弧長と線形関係)となるパラメータ値 c を次のように設定した.

$$c = \rho^*(0) \equiv \rho_0^* = \frac{\Delta s_0}{\Delta \rho_0} \rho_0. \quad (18)$$

図4(b)には伸開線を本曲線で近似した曲線の曲率半径 $\rho^*(s)$ と真の曲率半径 $\rho_I(s)$ を -5 だけシフトしたグラフを示している. 最後の2曲線分の接続点に曲率不連続点の確認ができる以外は大変良く近似できていることが分かる. (c)は一般化逆行列を使って求めた本曲線の曲率半径で, (d)は縮閉線の曲率半径であり,

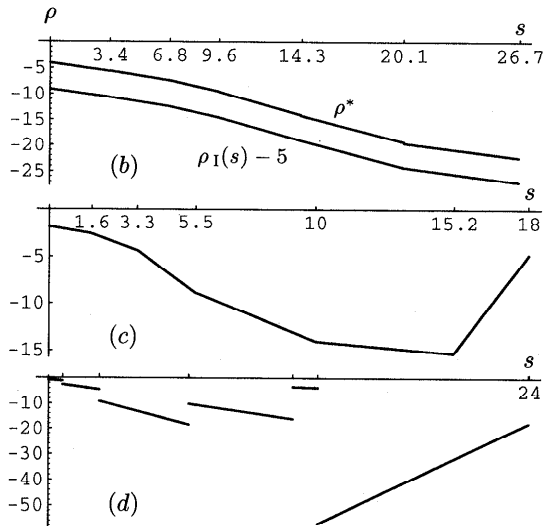
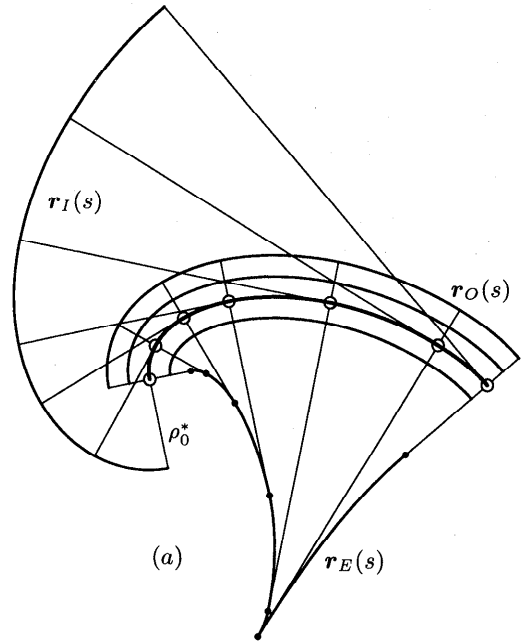


図4 (a) 対数らせんスプライン補間曲線とその随伴曲線, (b) 伸開線の曲率半径グラフ, (c) 一般化逆行列による本曲線の曲率半径グラフ, (d) 縮閉線の曲率半径グラフ

Fig. 4 (a) Logarithmic spiral spline interpolant and its associate curves, (b) Curvature radius of the involute, (c) Curvature radius of the curve by generalized inverse matrix, (d) Curvature radius of the evolute.

対応する曲線分の曲率半径の傾きが等しいことが確認できる.

6. 拡張

本曲線は変曲点を含まないし, 曲率連続のときには

2境界条件を設定できるだけである。応用によっては変曲点を含むことや、拘束条件を追加できることが望まれる。そこで、これらの問題に対処する本曲線の拡張法について簡単に述べる。

6.1 変曲点の導入

対数らせんでは曲率半径が弧長に比例して変化するのに対して、クロソイド曲線では曲率が弧長に比例して変化し、変曲点を含む。両曲線は形状設計分野では滑らかな曲線と考えられている^{☆1),10)}ので、本曲線にクロソイド弧を導入して変曲点付近を表現できるようにすることは妥当な考え方であろう。スパン $p_i p_{i+1}$ をクロソイド弧で置き換えるには式 (6), (7), (9), (10) をそれぞれ以下の式と置き換えればよい。

$$\theta(s) = \theta_i + \frac{1}{\rho_{k_i}} \Delta s_i t + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_{k_{i+1}}} - \frac{1}{\rho_{k_i}} \right) \Delta s_i t^2, \quad (19)$$

$$r(s) = p_i + \int_{s_i}^s \begin{pmatrix} \cos \theta(s) \\ \sin \theta(s) \end{pmatrix} ds, \quad (20)$$

$$\begin{pmatrix} f_{2i} \\ f_{2i+1} \end{pmatrix} \equiv \Delta s_i \int_0^1 \begin{pmatrix} \cos \theta(s) \\ \sin \theta(s) \end{pmatrix} dt - \Delta p_i = 0, \quad (21)$$

$$f_{2n+i} \equiv \Delta s_i (\rho_{k_i} + \rho_{k_{i+1}}) - 2\Delta\theta_i \Delta\rho_{k_{i+1}} \Delta\rho_{k_i} = 0. \quad (22)$$

図5に1例を示す。右上から描かれるこの曲線は4番目の曲線分に変曲点を含む。(a)は G^2 連続な本曲線で(b)はパラメトリック3次の C^2 補間曲線である。下の曲率半径グラフでは変曲点で曲率半径が無限大になるので、 $-10 \leq \rho(s) \leq 10$ の範囲のみを描いている。この点列データはビニール被覆の細い単線の形状からとったものである。パラメトリック3次の C^2 補間曲線は3番目の曲線分前後で急に曲がり過ぎていて不自然に見えるが、本曲線は良く元の形状を表現していて、曲線長もより短くなっている。

6.2 自由度の導入

1スパンを2曲線分(3曲線分でも同様)で張ることによって曲線に柔軟性を持たせることができる。このとき(らせん弧の有理3次近似¹⁰⁾のように)曲線分の弧長を等しくすれば簡単になるし、近似法との整合性もとれる。対応スパンの補間条件(9)と接線連続条件(10)を2曲線分用に少し変更する必要がある。

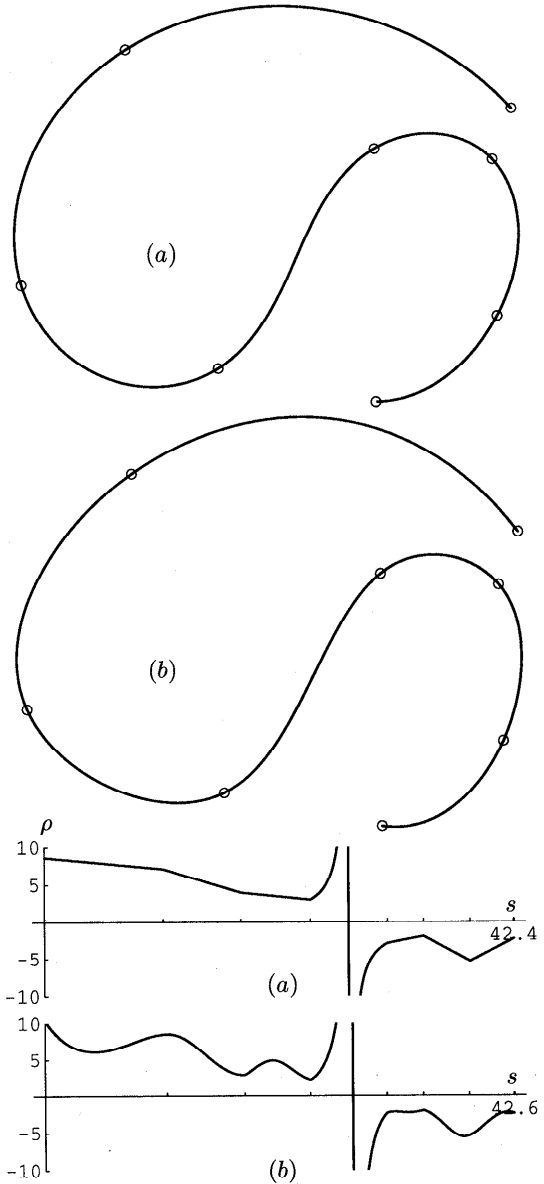


図5 曲線と曲率半径グラフ:(a)クロソイド弧によって変曲点を導入した対数らせんスプライン補間曲線,(b)パラメトリック3次の C^2 補間曲線

Fig.5 Curves and their curvature radii: (a) Logarithmic spiral spline interpolant with an inflection point introduced by a clothoid arc, (b) Parametric cubic C^2 interpolant.

それにしても個別のスパンごとに方程式を変更するのはわずらわしい。むしろ全スパンを2曲線分化して、デフォルトでこれら曲線分を(図2(d)で示したように)1曲線分化する条件を付加しておき、必要などころだけ必要な拘束条件に置き換えるようにすれば、余

☆ 「曲率が単調に変化する」と「曲率半径が区分線形関数となる」の両条件は曲線が滑らかであるための十分条件であるとすれば矛盾しない。

分の自由度が予期せぬうねりを生ずることもないし、定式化とプログラミングも簡単化できる。

7. ま と め

曲率半径が弧長の折れ線グラフとなる滑らかな対数らせんスプライン補間曲線の導出法を提案した。弧長、接線、曲率・曲率半径といった直観になじむ量だけから形状を設計・制御できるとか、縮閉線やオフセット曲線・伸開線も（近似すれば、）同じ対数らせんスプライン曲線で表すことができ取り扱いやすいとか、必要なら変曲点の導入や表現力を強化するための拡張も可能であるとかといった CAD のための優れた性質を持っていることが分かった。

今後、曲線とその縮閉線および伸開線との簡単な関係を積極的に利用して、滑らかな補間曲線を容易に創成できる方法を検討してゆきたい。

謝辞 本研究の一部は文部省科学研究費補助金（基盤 C 08650182）によって行われた。

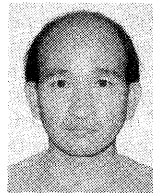
参 考 文 献

- 1) Farin, G., 木村文彦 (監修), 山口 泰 (監訳): CAGD のための曲線・曲面理論—実践的利用法, p.330, 共立出版, 東京 (1990).
- 2) Nutbourne, A.W., McLellan, P.M. and Kensit, R.M.L.: Curvature Profiles for Plane Curves, *Computer-Aided Design*, Vol.4, No.4, pp.176-184 (1972).
- 3) Pal, T.K.: Intrinsic Spline Curve With Local Control, *Computer-Aided Design*, Vol.10, No.1, pp.19-29 (1978).
- 4) Mehlum, E.: Nonlinear Splines, *Computer Aided Geometric Design*, Barnhill, R.E. and Riesenfeld, R.F. (Eds.), pp.173-207, Academic Press, New York (1974).
- 5) Stoer, J.: Curve Fitting With Clothoidal Splines, *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, Vol.87, No.4, pp.317-346 (1982).
- 6) Meek, D.S. and Thomas, R.S.D.: A Guided Clothoid Spline, *Computer Aided Geometric Design*, Vol.8, pp.163-174 (1991).
- 7) Meek, D.S. and Walton, D.J.: Offset Curves of Clothoidal Splines, *Computer-Aided Design*, Vol.22, No.4, pp.199-201 (1990).
- 8) 仇 時雨, 須田大春, 牧野 洋: 曲率を連続にした接線法によるクロソイド補間, 精密工学会誌, Vol.60, No.11, pp.1596-1600 (1994).

- 9) 黒田 満, 東 正毅, 齊藤 剛, 渡辺由美子: 数式処理システムによるクロソイドスプライン補間曲線, 精密工学会誌, Vol.62, No.12, pp.1717-1721 (1996).
- 10) Baumgarten, C. and Farin, G.: Approximation of Logarithmic Spirals, *Computer Aided Geometric Design*, Vol.14, pp.515-532 (1997).
- 11) Shikin, F.V.: *Handbook and Atlas of Curves*, p.545, CRC Press, Boca Raton, Florida (1995).
- 12) Coxeter, H.S.M., 銀林 浩 (訳): 幾何学入門, p.480, 明治図書, 東京 (1965).
- 13) 柳井晴夫, 竹内 啓: 射影行列・一般逆行列・特異値分解, p.214, 東京大学出版会, 東京 (1993).
- 14) 東 正毅, 毛利 仁, 齊藤 剛: 縮閉線に基づく曲率変化の滑らかな曲線, 曲面の生成 (第1報) — 縮閉線の決定と有理 Bézier 曲線による表現, 精密工学会誌, Vol.59, No.11, pp.1891-1896 (1993).

(平成 9 年 9 月 4 日受付)

(平成 10 年 1 月 16 日採録)



黒田 満 (正会員)

岐阜大学工学部機械工学科卒業, 同大学工学部助手. 1981 年豊田工業大学制御情報工学科講師, 現在助教. 曲線・曲面理論, コンピュータ・グラフィックスの研究に従事, 工学博士. 精密工学会, 日本図学会, ACM などの各会員.



倉賀野哲造 (正会員)

スタンフォード大学大学院修士課程修了. ソニー (株) 情報処理研究所主任研究員を経て, 現在ソニー (株) 3D エンジニアリング部統括部長. 形状モデリング, 自由曲面の CAD/CAM などの研究に従事. スキー, ゴルフ, フライフィッシングに熱中. 工学博士. IEEE, ASME, 精密工学会, 日本機械学会, 型技術協会などの各会員.



久保 哲夫

昭和 48 年東京大学大学院工学研究科修士課程修了. 昭和 54 年大阪大学医学部卒業. 昭和 56 年同大学大学院博士課程を中退し, クボテックを創業. クボテック (株) 代表取締役. コンピュータ, ロボット, 外観検査, CAD/CAM などの技術に興味を持っている.