ホモロジー群の生成元の自然な表示の研究†

1P－9

林 忠成　品川嘉久　日置尋久　川道亮治

東京大学

1　はじめに

医学診断システム，地形データベースや製品の形状設計システムのような，物体の構造情報を扱うソフトウェアは，コンピュータにその情報を自動認識させなければならない．例えば，製品を設計しても，その製品が機械で加工可能な形であるかを自動的にチェックできなければならないし，医学診断システムでも，医学データの中から，病巣部分を判断して取り出せなければならない．臓器に何個の穴が開いているかなど，その物体の構造は，ホモロジーという量を計算すればわかる．

このように物体の構造をコンピュータに理解させるために，数学理論トポロジーの大きな分野であるホモロジー理論が有用である．ホモロジー理論では，物体の骨組（位相構造）を，ホモロジー群と呼ばれる量（アーベル群）で記述する．もし２つの物体が（位相的に）同相ならばそれらのホモロジー群は同型になる [1]．このようなホモロジー群に対応する物理的な形を，どのようにして目に見やすい形で表示するかについて述べる．本研究では，特に，生成元の表示を，自然なものにすることに重点を置く．

生成元の選び方には任意性がある．生成元を代数的に計算し，それを表示する際，直観的に分かりにくい生成元が求まることが多かった．そのため，教育システムに用いたり，認識を行うためには不都合があった．そこで本研究では，可視化の際に，直観的に分かりやすい生成元を求める方法を提案する．

2　ホモロジー理論の簡単な紹介

多くの図形は三角形に分割することができる．この分割を図形の構造としてとらえ，それぞれの三角形のつながり方をみることによって，図形の位相的構造を導くことができる．

この考え方を一般化し，図形を単体で分割した単体的複体において，単体どうしのつながりをアーベル群の観点から捉え，図形の位相的構造を表すのが，単体的複体のホモロジー群である．

A Study on a Natural Visualization of Homology Group Generators†
Lim Chong Seng, Yoshihisa Shinagawa, Hirohisa Hioki and Ryouji Kawamichi The University of Tokyo

単体と複体

m 次元単体 S とは，R^n の $m+1$ 個 $(m \leq n)$ の点 $p_0, \ldots, p_m$ からなる集合であり，そのすべてのベクトル $p_i - p_0$ が一次独立である．直観的にいうと，０単体は点，１単体は直線，２単体は三角形，３単体は四面体のようなものである [1].

k 面とは単体 S の頂点の部分集合からなる k 単体のことである．

また，複体は，単体の有限集合 K である．

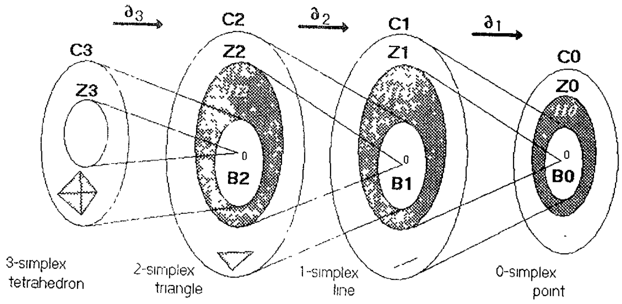

図 1: ホモロジー群の可視化可能な部分

単体的複体のホモロジー群

鎖群 $C_r(K)$ は K の全ての r 単体で生成されるアーベル群である．$C_r(K)$ の元である鎖 c は $c = \sum_i n_i \sigma_i \in C_r(K)$ となっている．

また，鎖群は以下の部分群を持つ：

$$
\begin{array}{rrcl}
\text{輪体群} & Z_r(K) & = & kernel\ \partial_r \\
\text{境界輪体群} & B_r(K) & = & image\ \partial_{r+1} \\
\text{ホモロジー群} & H_r(K) & = & Z_r(K)/B_r(K)
\end{array}
$$

図１のように，$B_r = \partial_{r+1}(C_{r+1}) \subset Z_r \subset C_r$ である [2]．なお，∂_r は r 次元の境界作用子である．

r 次元輪体群は r 次元サイクルの集合であり，各元の境界がゼロになるのである．r 次元境界輪体群は $r+1$ 次元鎖群の境界の集合である．r 次元ホモロジー群とは，直観にいうと，物体の中の r 次元の穴を表すようなもので，０次元は連結成分，１次元は穴，２次元は空洞 (閉空間) を表すような位相的な特質である．

3 アルゴリズム

ここで，目に見やすいホモロジー群の生成元を求める方法を提案する．

単体的復体 K の r 次元鎖群 $C_r(K)$ の生成元 σ_i からなる一般の元は $c = \sum_i a_i\sigma_i$ のように表すことができる．

1. 輪体群 $Z_r(K)$ の計算
   従来の手法は，条件 $\partial(\sum_i a_i\sigma_i) = 0$ を満たす係数 a_i に関する方程式系を導き，係数の間の関係を求めるのであった．ここで，各面が一つの単体にのみ属しているようなサイクルは必ず輪体群の生成元として，計算に使うことにした．

   具体的に言えば，3 次元鎖群について言えば，2 次元単体の三角形の一面は 3 次元鎖の境界であるが，反対側は中身のつまっていない空間である．2 次元鎖群の場合では，1 次元単体の直線はただ一つの 2 次元単体の境界である．

   このようなサイクルは，ホモロジー群の生成元になり，しかも，直観的に分かりやすい．

2. 境界輪体群 $B_r(K)$ の計算
   r 次元境界輪体群 $B_r(K) = image\ \partial_{r+1}$ を計算するには，実際に $r+1$ 次元鎖の境界を計算すればよい．しかし，すべての $r+1$ 次元鎖の境界を取ると，$Z_{r+1}(K)$ が 0 でない場合には，生成元の計算が膨大になってしまう．

   そこで，$Z_r(K)$ の各生成元から適当な $r+1$ 次元鎖をまとめて境界を計算する．このとき，r 次元鎖のうち，連結なものをなるべくまとめていく．これを木構造で管理し，最大のものと求める．

   但し，ここで注意しなければならないのは，以上の輪体群の計算で求めた，各面が一つの単体にしか属さないようなサイクルに連結している単体を木に入れないことである．そうしないと，ホモロジー群が正しく計算できない．

3. ホモロジー群 $H_r(K)$ の計算 (商群の計算)
   r 次元ホモロジー群 $H_r(K)$ は，商群 $Z_r(K)/B_r(K)$ で与えられる．以上の計算から得られた $B_r(K)$ の生成元を $Z_r(K)$ の生成元の線形結合で表し，その関係行列を導くことができる [3]．この行列を標準形に変形し，$H_r(K)$ の標準直和分解を求めることができる．

4 実装結果

本手法に基づいて，図 2 のようなシステムを作った．

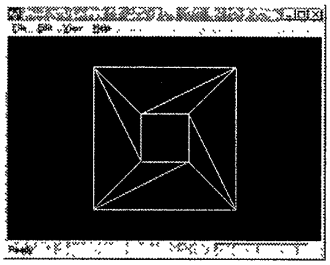

図 2: ホモロジー群を可視化する実装

使用者の入力したデータファイルを読み，ホモロジー群の計算をするのである．場合によっては，複数のホモロジー群の生成元が得られる (図 3 と図 4)．

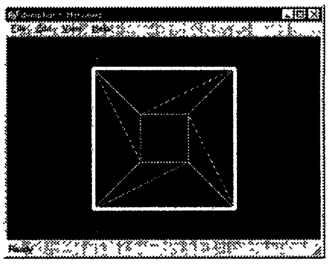

図 3: 一つホモロジー群の生成元

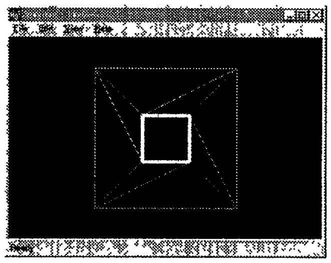

図 4: もう一つホモロジー群の生成元

5 まとめ

ホモロジー群の可視化の際に，直観的に分かりやすい生成元を求める方法を提案した．本手法を応用した教育システムや認識システムを構築するのが今後の課題である．

参考文献

[1] Tosiyasu L.Kunii, Hirohisa Hioki and Yoshihisa Shinagawa. *Visualizing Highly Abstract Mathematical Concepts: a Case Study in Animation of Homology Groups* The University of Tokyo, 1995

[2] William S. Massey. *A Basic Course in Algebraic Topology* Springer-Verlag, 1991

[3] James R. Munkres. *Elements of Algebraic Topology* Addison-Wesley, 1984