

正規化楽曲パタンののるメッシュパタン系としての、平均律系について

6 J-4

(ストウラーレの近似平均律系に結びつけて)

横田 誠 加藤 佳仁 横山 未希子
電気通信大学

1. ま え が き

普通、音楽的特性は12音平均律メッシュパタン上にパタン化されている。素音の生成は有限の長さの実線路というシステムの振動モードによっている。音楽的特性の特長は、各隣接素音間の音楽的ステップ接続形状にある。

我々は、人間の音楽的感受性と、数理線路伝送理論の立場から、正規化メッシュパタンという、分布定数的パタン系を考えている。そしてその上に、既存の楽曲をパタン化して、人工的感受、変換、創成系と共に、その曲相的分類等の問題に当たっている。この正規化楽曲パタン系を、ここでは、音周波数・音長の2元系に限る系としたが、それは、音楽幾何学的に、先ず、ユークリッド的変換的に考えることになる。

その内の、音長パタン系は、相似変換系で、今回の問題系である、音周波数パタン系(各素音の音長は全て単位長とする)としては、平行移動変換である。いま任意のアナログな時系列パタン(一般論として、1オクターヴ内に、約束された有限数の音のみあると云う制限を設けずに)があったとする。このパタンを時間軸上で前後にシフトしても、その曲と認識するのに問題がない。これを、周波数軸上にシフトしたら、忽ち、原曲と異なる音楽的曲相となり、問題が生じる。周波数軸上にシフトしても、原曲と異なる音楽的曲相となる条件下のメッシュパタン系が、正規化パタン系のワクス系である。通常の12音平均律系は、純正な平均律系とはやや異なる近似平均律系である。

今回はストウラーレの近似平均律系を基に、12音平均律系の意味を吟味する。

2. 分布定数系としての12音平均律系の

基礎系としての総体的1色オクターヴ系音楽系は、素音の連鎖系ということで、波動物理系の、基礎系である。メンデレーフ周期律系は、絶対的、いわゆる物理的原子系である。音楽系は、素音を発生する線路系の存在

が必須条件である。有限長 l の物理的線路が与えられると、二つの直交モード(伝送速度 v で示される): (沿線モード, 射線モード) についての周波数 f が生じる可能性が出てくる。

各モード ν は、

$$\nu = f \cdot l$$

と乗分解もされる。分布定数理論の立場からすれば、 $l = (1/4)\lambda$ の線路素子を、単位素子: ue : unitelement としており、発音線路素子としても、 ue である。音楽的中心周波数を、 2^n Hz 系列として、現用のC音の周波数に近い、 2^8 Hz とする。この周波数を発生する線路長 $l = (1/4)\lambda$ の線路素子が与えられると、オクターヴ系列として、 2^9 Hz, 2^{10} Hz, , , が自動発生する。

分布定数系の基礎系は、相対的1色オクターヴ系に関する、リチャードの鍵定理系である。音楽系は、相対的12色オクターヴ系として、考えられている。問題は、特定のオクターヴ系の、1オクターヴ間隙に、どのように12音系を当てはめるかである。

3. プトレマイオス(ピタゴラス)由来の音階系と、ヘルムホルツの不協和音系

音楽的音程が整数比で表せるというピタゴラスの主張を、"Harmonics"で報告した、プトレマイオス、彼は、AD150、彼の1弦琴(キャノン)による実験から、ピタゴラスの $(3/2)^n$ 系列(C音を規準に、D, E, , G, A, B等の音系と、関連の、 $(4/3)$ 音系であるF音と、7音系列を得た。これ等の間隔は、E-F間、B-C間の比が、 $(256/243)$ 、他4つの区間での比は、 $(9/8)$ であることを得た。この間隔の狭い方を、単位の半音として、1オクターヴ内を12分割した。一方、1877、ヘルムホルツの不協和音系の実験から、その12音中の7御系が協和音系であることが得られた。

後、 $r = (2)^{1/12} = 1.059463094 \dots$ が得られたが、今回は、ギリシャ以来の、図法幾何学による解方に結びつける、1743の、ストウラーレのシステム(フレットと関数)について吟味することにする。

4. ストウラーレのシステム(ストウラーレのフレットシステムと、ストウラーレ関数系)

a) ストララーレのフレット
 ピタゴラス比系は、素数 2, 3 のみの系であり、それから、半音間隔 $256/243 = (2^8/243)$ による 12 音オクターヴ系が得られていた。

ギリシャの数理手法の一つに、作図による解法系があるが、今回のような、 $2^{n/12}$ の系については、 $n=6$ の、 $2^{1/2}$ のみが図式解法が得られている。

1743年に、スエーデンの Daniel Strahle によって、図 1 に示された方法で、図式的、近似 12 音平均律系が与えられたということである。図 2 は、ストララーレのフレットの寸法系をグラフ化したものと、対応の関数 $y=2^x$ を比較図示したものである。

まず、(0) 式を (1) 式のように具体化する。

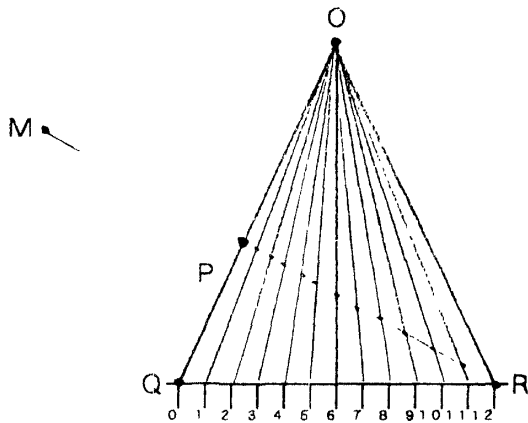
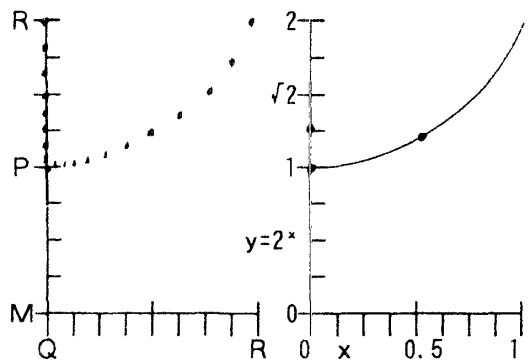


図 1. ストララーレのフレット作図



a) ストララーレ関数 b) $y=2^x$
 図 2. ストララーレのフラット対応特性 a) と、 $y=2^x$ 特性 b)

[文 献]

- 1) 横田 誠, 加藤佳仁, 横山未希子: "音楽的論理系の基礎系としての、二つの音楽的ファジーシステム" 電子情報学会春大会, 1997, 3,
- 2) 横田 誠, 加藤佳仁, 横山未希子: "2値 2元楽曲パツン 系の分類について" 電子情報学会秋大会, 1994,
- 3) 横田 誠: "楽曲構造の音楽的正規化について" 音楽音響研究会 (音響学会) Vol. 7, No. 7, 1989, 3,
- 4) 横田 誠: "音楽的「味覚系」への入力系としての音楽的「味子系」について" 音響学会春大会, 2-2-1, 1991, 3,
- 5) 横田 誠: "楽曲パツンエレメントの音楽的味子的分類について" 音響学会春大会, 1992, 3, 18, No. 3, 1992, 3,
- 6) 後藤和之, 横田 誠: "ニューラルネットワークによる音程抽出について" 電子情報通信学会論文誌, Vol. J75A,

$$y = (ax + b) \cdot (cx + d)^{-1} \quad (0)$$

$$= [(2 - (2)^{1/2})x + (2)^{1/2}] \cdot [(1 - (2)^{1/2})x + (2)^{1/2}]^{-1} \quad (1)$$

問題は、 $2^{1/2}$ の整数比系としての近似である。

図 2 a) にかんする実験式がストララーレ関数である。

b) ストララーレ関数: (S)

$$y = [10x + 24] \cdot [-7x + 24]^{-1} \quad (S)$$

$2^{1/2}$ の近似整数比系としての基礎系として、素数, p, q , に関する

$p^2 = 2q^2$ は解が無いので、最少誤差の近似系としての、

$$p^2 = 2q^2 \pm 1 \quad \text{に関して,}$$

$$p=3, \quad q=2, \quad p/q=3/2$$

$$7, \quad 5, \quad 7/5$$

そして、 $p=17, q=12,$

$$p/q=17/12 \quad \text{を (1) に代入}$$

すると式 (S) にいたる。

これは、スチュアートの説明であるが、その前 1957年に、ストララーレの名誉を回復した、Barbourによる、 $p/q=58/41$ もあった。

6. むすび

伝子工学系は、人間の機能、特に、その感性機能に近似した系を目指している。それは、生物的、更に、意識的系へと展開するものの、基礎的系としては、数理伝送的系と深くかわる。そして、人工システムが線路系と回路系であり、それは幾何学的系と、代数学的系とのかわりから離れられない。

音楽的系は、数理線路伝送の根源的秘密を背負っている、にもかかわらず、それは人間の感性、それは線路的回路系としての生物的機能を背景とした、情動的感性の基幹系としての、絵画的系と対となる音楽的系としての、呈味系でこそある。

音楽的構造の特徴は、12音平均律系を底に考えるとところにある。

今回は、ストララーレのフラット系という幾何学的線路系と、その代数学的近似系としての、ストララーレ関数系の面から、12音平均律系を吟味して見たものである。