代数不等式制約評価アルゴリズム

1 J − 3

沢田浩之
機械技術研究所

1　はじめに

制約充足問題において扱われる制約の多くは，等式制約と不等式制約に分類される．問題を解決する場合，等式制約は，変数を１つずつ消去して解を得るために用いられる．これに対して不等式制約は，得られた解の妥当性を検証するために用いられる．

不等式制約を評価する場合，その制約中に現れる変数にはすべて具体的な値を与えておくのが通常である．すなわち，未知数を含む不等式の評価は，線形制約など扱いの容易なものを除けば，一般には行われない．未知数を含む不等式制約中の矛盾や冗長性を検出できれば，不要な数値計算を排除することによって，全体の処理効率を向上させることが可能になるものと考えられる．未知数を含む代数不等式制約の評価方法について述べる．

2　問題の設定

本稿では，２つの簡単な例題を取り上げ，これを用いて説明を行う．

２つの制約集合 $C_1(x)$，$C_2(x)$ を定義する．そして，各制約集合をそれぞれ満足するような x の値を求める制約充足問題を考える．

$$
\begin{aligned}
C_1(x) &= \{x^2+2x-3=0, x^2-x-3 \geq 0,\\
&\qquad x \geq -1, x \leq 2\},\\
C_2(x) &= \{x^2+2x-3=0, x^2-x-3 \leq 0,\\
&\qquad x \geq -1, x \leq 2\}.
\end{aligned}
$$

従来の方法では，まず，等式制約を満足する x の値を求める．この例では，$C_1(x)$，$C_2(x)$ いずれの場合も “$x=-3$ または $x=1$” が得られる．

次に，これらの解から不等式制約を満足するものを選び出す．$C_1(x)$ の場合，解は存在しない．$C_2(x)$ の場合には，$x=1$ が解として選ばれる．

ここで，あらためて制約集合 $C_1(x)$，$C_2(x)$ を見直してみる．$C_1(x)$ に含まれる不等式制約はすでに矛盾しており，これを事前に検出できれば，x の値を計算する必要はなくなる．また，$C_2(x)$ に含まれる不等式制約のうちの１つは冗長であり，この冗長性を事前に排除できれば，不等式制約による解の妥当性検査のための計算コストを削減できる．このような代数不等式制約中の矛盾や冗長性を検出する方法について述べる．

3　概念と定式化

式 (1) で表される不等式制約は，外部変数を導入することにより式 (2) の形に変換される．

$$f_1(\boldsymbol{x}) \geq 0, \ldots, f_m(\boldsymbol{x}) \geq 0, \tag{1}$$

$$
\begin{aligned}
&F_1 = f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, F_m = f_m(\boldsymbol{x}),\\
&F_1 \geq 0, \ldots, F_m \geq 0.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

本稿で提案する不等式制約評価法とは，F_j のみからなる方程式を導くことにより，不等式制約中の矛盾や冗長性を検出するものである．矛盾や冗長性は，以下の規準により判定される．

矛盾: $\sum A_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} F_1^{\alpha_1} \ldots F_m^{\alpha_m} = constant < 0$, $\forall(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)\{A_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} > 0\}$ が導かれたとき，矛盾．

冗長性: $F_j = \sum A_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} F_1^{\alpha_1} \ldots F_m^{\alpha_m}$, $\forall(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)\{A_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} > 0\}$ が導かれたとき，$f_j(\boldsymbol{x}) \geq 0$ は冗長．

F_j のみからなる方程式は，主として書き換え操作 [1] により，以下の手順にしたがって導かれる．

An algorithm for solving algebraic inequality constraints
Hiroyuki Sawada
Mechanical Engineering Laboratory
Namiki 1-2, Tsukuba, Ibaraki 305, Japan

1. $C = \{f_1(\boldsymbol{x}) = F_1, \ldots, f_m(\boldsymbol{x}) = F_m\}$, $R = G = \emptyset$ とする.
2. $C = \emptyset$ であれば終了.
3. C の中から最大単項[1]が最小の方程式をすべてコピーする. R に含まれる方程式の中で, これらのコピーされた方程式によって書き換え可能なものを R から削除し, C に加える. コピーされた方程式を R に加える.
4. R に含まれる方程式によって, C に含まれる方程式の書き換えを実行する. このとき, 実行可能な書き換えはすべて行う.
5. F_j のみからなる方程式を C から削除し, G に加える.
6. Step 2へ戻る.

4 適用例

例題として取り上げた2つの制約集合 $C_1(x)$, $C_2(x)$ に対して本手法を適用した例を示す.

(1) 制約集合 $C_1(x)$ の場合

1. $C = \{x^2 - x - 3 = F_1, x+1 = F_2, -x+2 = F_3\}$, $R = \emptyset$, $G = \emptyset$.
2. $C = \{x^2 - x - 3 = F_1, x+1 = F_2, -x+2 = F_3\}$, $R = \{x = -1 + F_2, x = 2 - F_3\}$, $G = \emptyset$.
3. $C = \{F_2 + F_3 - 3 = 0, F_1 - F_2^2 + 3F_2 + 1 = 0, F_1 - F_2^2 + F_2 - 2F_3 + 7 = 0, F_1 + F_2F_3 + 1 = 0, F_1 + F_2F_3 - 2F_2 - 2F_3 + 7 = 0, F_1 + F_2F_3 - F_2 - F_3 + 4 = 0, F_1 - F_2 - F_3^2 + 2F_3 + 4 = 0, F_1 - F_3^2 + 3F_3 + 1 = 0\}$, $R = \{x = -1 + F_2, x = 2 - F_3\}$, $G = \emptyset$.
4. $C = \emptyset$, $R = \{x = -1 + F_2, x = 2 - F_3\}$, $G = \{F_1 - F_2^2 + 3F_2 + 1 = 0, F_1 - F_2^2 + F_2 - 2F_3 + 7 = 0, \underline{F_1 + F_2F_3 + 1 = 0}, F_1 + F_2F_3 - 2F_2 - 2F_3 + 7 = 0, F_1 + F_2F_3 - F_2 - F_3 + 4 = 0, F_1 - F_2 - F_3^2 + 2F_3 + 4 = 0, F_1 - F_3^2 + 3F_3 + 1 = 0\}$.

下線部より矛盾が検出される.

(2) 制約集合 $C_2(x)$ の場合

1. $C = \{-x^2 + x + 3 = F_1, x + 1 = F_2, -x + 2 = F_3\}$, $R = \emptyset$, $G = \emptyset$.
2. $C = \{-x^2 + x + 3 = F_1, x + 1 = F_2, -x + 2 = F_3\}$, $R = \{x = -1 + F_2, x = 2 - F_3\}$, $G = \emptyset$.
3. $C = \{F_2 + F_3 - 3 = 0, F_1 + F_2^2 - 3F_2 - 1 = 0, F_1 + F_2^2 - F_2 + 2F_3 - 7 = 0, F_1 - F_2F_3 - 1 = 0, F_1 - F_2F_3 + 2F_2 + 2F_3 - 7 = 0, F_1 - F_2F_3 + F_2 + F_3 - 4 = 0, F_1 + F_2 + F_3^2 - 2F_3 - 4 = 0, F_1 + F_3^2 - 3F_3 - 1 = 0\}$, $R = \{x = -1 + F_2, x = 2 - F_3\}$, $G = \emptyset$.
4. $C = \emptyset$, $R = \{x = -1 + F_2, x = 2 - F_3\}$, $G = \{F_2 + F_3 - 3 = 0, F_1 + F_2^2 - 3F_2 - 1 = 0, F_1 + F_2^2 - F_2 + 2F_3 - 7 = 0, \underline{F_1 - F_2F_3 - 1 = 0}, F_1 - F_2F_3 + 2F_2 + 2F_3 - 7 = 0, F_1 - F_2F_3 + F_2 + F_3 - 4 = 0, F_1 + F_2 + F_3^2 - 2F_3 - 4 = 0, F_1 + F_3^2 - 3F_3 - 1 = 0\}$.

下線部より F_1 に対応する不等式 $x^2 - x - 3 \leq 0$ が冗長であることが分かる.

5 限界と課題

本手法では, 矛盾および冗長性の判定の際, 因数分解や平方完成などの操作は行われておらず, すべての矛盾や冗長性を検出することはできない. また, すでに例で見たように, 不等式評価のために使われる方程式はごくわずかであるにも関わらず, 多くの方程式が生成されてしまう. これらが現時点における本手法の限界であり, 課題である.

6 おわりに

一般の非線形代数不等式制約に関する評価手法を提案した. ここでは1変数の例のみを取り上げたが, 多変数の場合についても適用可能である. 本手法は不等式そのものを数式処理するため, 一切の数値解法が不要である. したがって, いわゆる過小制約問題も取り扱うことができる.

参考文献

[1] Buchberger, B.: *Gröbner bases: An Algorithmic Method in Polynomial Ideal Theory, Technical Report, RISC-LINZ* (1983).