数値シミュレーションにおける安定条件の導出に関する研究

6F－3

古屋　哲、Choompol Boonmee、真鍋 保彦、露木 淳雅、川田 重夫
長岡技術科学大学 工学部

1．はじめに

現在，物理や工学などの自然科学分野では，現象を解析する方法として，数値シミュレーションがよく用いられている[1]．この方法では，方程式を離散化し，数値計算を行って解を近似的に求める．離散化の方法としては差分法，有限要素法などがよく用いられている．正しい近似解を求めるためには，数値シミュレーションの収束性，安定性などの問題を考慮する必要がある．

安定性については，離散式から計算した近似解が発散しないように，安定条件を導出し，安定条件を満足するように計算を行う必要がある．また，方程式の種類及び差分スキームの違いにより，数値シミュレーションを行うたびに安定条件の導出を行わねばならない．一般には方程式系が多数本の式から構成される場合があり，人間が手作業で導出することは容易なことではない．しかし，その導出はある程度機械的に行うことが可能であり，理論的にも確立されてきている[2]．

本研究では，差分スキームからの安定条件導出の作業をコンピュータにより自動化することで，ユーザ（人間）が要する労力を軽減させ，数値シミュレーションの効率化の向上を図ることを目的とする．

Computer assisted stability analysis in numerical simulations
Satoshi FURUYA, Choompol BOONMEE, Yasuhiko MANABE, Atsumasa TSUYUKI, Shigeo KAWATA
Nagaoka University of Technology, Nagaoka, 940-21, Japan

2．安定条件導出の方法

安定条件を導出する方法としては，主に2つの方法がある[3,4]．一方は，解を Fourier 級数の解で仮定して導出する方法であり，もう一方は方程式を行列の形で表現し，これより得られる行列の固有値から導出する方法である．

Fourier 法による安定条件導出の自動化についてはすでに研究が行われている[2]．しかし，解を周期解と仮定して扱うため，周期境界条件以外の境界条件を考慮することができないという欠点があり，得られた安定条件が厳密なものでない場合がある．一方，行列法では境界条件を考慮することができ，Fourier 法より一般性をもっている．

そこで，我々は行列法を用いて安定条件の導出を行うことにした．安定条件を導出する手順は，次の通りである．

(Ⅰ)差分方程式（系）を用意する．一般的には次の形で表わされる．

$$LU^{n+1} = RU^{n} \quad -(1)$$

但し，$U^{n} = \left[u_j^n\right]$，$L = \left[l_{ij}\right]$，$R = \left[r_{ij}\right]$，

$$\left(i, j = 1, 2, .., J-1; n = 0, 1, 2, ..\right).$$

(Ⅱ)次のような行列の形にまとめる．

$$U^{n+1} = MU^{n} \quad -(2)$$

但し，$M = L^{-1}R = \left[a_{ij}\right]$，

$$\left(i, j = 1, 2, .., J-1\right).$$

(Ⅲ)(2)式右辺の正方行列 M の要素から，

$$\left|\lambda - a_{rr}\right| \le P_r \quad -(3)$$

を求める．但し，

$$P_r = \left| a_{r1} \right| + \left| a_{r2} \right| + .. + \left| a_{r,r-1} \right| + \left| a_{r,r+1} \right| + .. + \left| a_{r,J-1} \right|, \qquad -(4)$$

$$(r = 1, 2, .., J-1).$$

(Ⅳ) (Ⅲ)で求めた不等式(4)を，Von Neumann 条件，

$$\left| \lambda \right| \leq 1 \qquad -(5)$$

のもとで解き，得られた解の中で最も厳しい条件を選ぶ．

3．自動化の流れ

図１に安定条件導出の自動化の流れを示す．安定条件の導出部分については，数式処理ソフトウェア Maple[5]を使用して，２．の手順で記号処理を行う．Maple は独自のプログラミング言語を備えており，これにより比較的簡単に導出部分のプログラム作成を行うことが可能となる．得られた安定条件が適用不可能であれば，差分スキームを変更して導出を繰り返し行う．

4．まとめ

現在は，安定条件導出部分のプログラム作成を，幾つかの差分式に対して行った．その結果，本提案手法が有効であり，ユーザ（人間）の要する労力を軽減できる可能性を示すことができた．

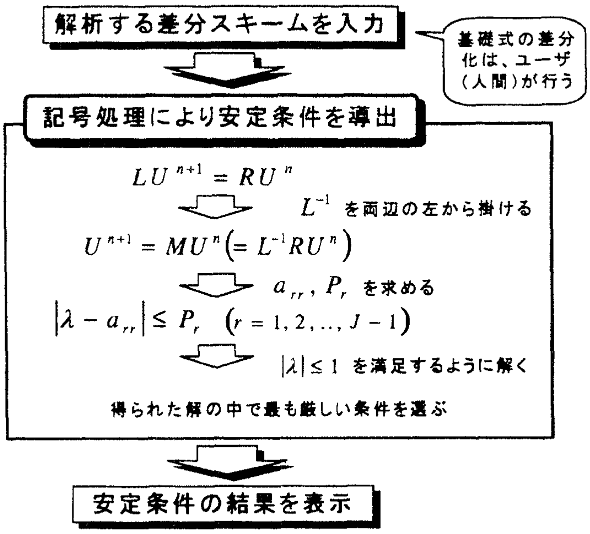

図１：自動化の流れ

参考文献

[1] S.Kawata, K.Iijima, C.Boonmee and Y.Manabe: "Computer-assisted scientific-computation / simulation - software-development system. — including a visualization system—", IFIP Transactions A-48, pp.145-153(1994).

[2] Steinberg, S. and Liska R.：“Stability Analysis by Quantifier Elimination”, IMACS Symposium SC-1993(1993).

[3] G.D.スミス著，藤川洋一郎訳：“コンピュータによる偏微分方程式の解法[新訂版]”，サイエンス社(1996).

[4] 高見穎郎，河村哲也：“偏微分方程式の差分解法”，東京大学出版会(1994).

[5] Bluce W. Char et al.:"Maple V Language Reference Manual", Springer-Verlag(1991).