

並列処理システムにおける

5 F-4 連立一次方程式の係数マトリックス自動分割に関する報告

齋藤剛 岩澤京子

東京農工大学 工学部 電子情報工学科

1. はじめに

分散メモリ型の並列計算機で SPMD(Single Program Multi Data)モデルの並列処理を行う場合、そのデータ分割の良し悪しが処理時間に大きな影響を与える。このデータ分割には、ハードウェア性能はもちろん、アルゴリズムやデータの質や量まで関わってくるため、そのマシン、そのソフトウェア、そのデータごとに調整しなければならない。そこでこのデータ分割の自動化について考える。

本報告では分散メモリ型並列計算機 nCUBE 上の自作並列改訂コレスキー分解ライブラリにおけるデータ分割の自動化について報告する。

2. 改訂コレスキー分解法の並列化

改訂コレスキー分解の分解計算の部分（前進消去、後退代入の部分を除く）をデータ分割法により並列化する。解く方程式の係数行列を小行列に分割して、分散メモリ型並列計算機の各 PE に分配する。各 PE は与えられた小行列を必要に応じて他の PE とやりとりしながら並列に分解計算を行う。

3. 係数行列の分割

図 1 のように係数行列（対象行列の下三角部分）を正方行列に分割し、行ごとに各 PE にサイクリックに割り当てる。コレスキー分解法の計算では、同じ行および列の小行列間に依存関係があるので、このように同じ PE にまとめ

た方が PE 間の通信回数を減らすことができよい。係数行列の分割数 d は PE 数の倍数とする。各 PE は同じ行数を割り当てられるが、図 1 よりも明らかなように、番号の大きい PE は、

PE0	1								
PE1	2	1							
PE2	3	2	1						
PE3	4	3	2	1					
PE0	5	4	3	2	1				
PE1	6	5	4	3	2	1			
•	7	6	6	4	3	2	1		
•	8	7	6	5	4	3	2	1	

図1 係数行列のサイクリック分割例

ど割り当てられる小行列が多い。なお、図の小行列（正方形）の中の数字はその小行列が他の小行列と行う積和計算の回数を表している。

4. 分割数と演算経過時間

表 1 は分割数 d と分解計算に要した経過時間の関係を PE 数別にまとめたものである。分解計算の経過時間として、全ての小行列の PE への割り当てが終わってから、PE 上で分解計算を行い、全ての小行列がホストに返されるまでの経過時間を取った。なお、係数行列の次数 N は 576 である。

表を見ても明らかなように、同じサイズの行列を同じ PE 数で解いても、分割数によってその計算時間にかかなり開きがある。分割数が少ないと並列度が上がらず、分割数が多いと並列化による速度向上を上回って、通信のオーバーヘッドが増えてしまう。その中間に処理時間を最短にする最適な分割数が存在する。

Automatic Distribution of Coefficient matrix of simultaneous equation for parallel processing

Tsuyoshi Saito Kyoko Iwasawa

Tokyo University of Agriculture and Technology

表1 分割数と経過時間

d	2PE	4PE	8PE
4	314	259	
8	245	168	132
12	224	138	101
16	215	126	85
24	208	117	72
32	213	116	68
36	220	119	67
48	273	143	80
64	487	249	129

単位 (秒)

5. 最適な分割数の計算モデル

今、第4章で計測した経過時間を通信関係に費やした時間 C とそれらをいっさい含まない純粋な計算時間 T との和で表す。理論上、常に受信に先だって送信が行われるアルゴリズムなので、通信待ち時間は無いものとする。 C 、 T を分割数 d で表し、その和 $C+T$ を最小にする d を求める。

5.1. 分割数と計算時間

全体の処理時間は最も処理時間の長かった PE のそれとほぼ等しい。3章で述べたように、行ごとに各 PE に小行列を割り当てた場合、番号の最も大きな PE (図1では PE3) が割り当てられる小行列が最も多く、処理時間も長い。

コレスキー分解計算の大部分は積和計算である。各小行列は同じ列の自分を含むより上にある全ての小行列と積和計算を行う。従ってその位置によって行う積和計算回数が異なり (図1)、各行ごとの積和計算回数も異なる。第 j 行の積和計算回数は

$$j(j+1)/2 \quad (1)$$

である。3章で述べたように、使用している PE 数が p の時、最も処理時間の長い PE p には、サイクリックに第 p 行、第 $2p$ 行、第 $3p$ 行、... が割り当てられる。その総積和計算回数は

$$d(d+p)(2pd+p+3)/12p \quad (2)$$

となる。一回の積和計算で $2(N/d)^3$ 回の乗算と $(N/d)^3$ 回の加算を行うから、ループ一回当たり

の処理時間を t とすると T は

$$T=t(N/d)^3d(d+p)(2d+p+3)/12p \quad (3)$$

となる。

5.2. 分割数と通信コスト

3章で述べたように小行列を行単位でサイクリックに各 PE に割り当てた場合、同じ列の小行列間で通信が発生する。各小行ごとに自分以外の全ての PE に対して通信を行わなければならない。したがって全体では

$$d(d-1)/2 * (p-1) \quad (4)$$

回の通信が発生する。今、一回当たりの通信コストを c で表す。ここでは小行列の大きさの違いによる通信コストの差はほとんどないものとし、 c は通信立ち上げ時間とデータ転送時間を含むものとする。 c を用いると全体の総通信コスト C は

$$C=c*d(d-1)/2*(p-1) \quad (5)$$

となる。

5.3. 最適な分割数

簡単のため C の 1 次の項、 T の分母が 2 次の項を無視する。 $C+T$ を微分して d で解くと

$$d^3 = P \cdot t \cdot N^3 / c \quad (6)$$

を得る。但し、 $P=(p+1)/4p(p-1)$ である。

6. 結論

式(6)より以下のことが推察される。

- 最適な分割数 d は係数行列の次数 N に強く依存し、比例関係にある。
- 最適な分割数 d は PE の演算速度 t 、通信速度 c 、プロセッサ数 p 等のハードウェア性能の影響は問題規模に比べると小さい。
- d の指数はソフトウェアのアルゴリズムのデータ量に対する計算オーダーと関わっている。

今後この評価が課題である。

7. 参考文献

- [1]「計算力学と CAE シリーズ 1. 有限要素法」
矢川基経 吉村忍 培風館 1991