4連結平面グラフの格子凸描画[1]

4E−7

三浦 一之　中野 眞一　西関 隆夫
東北大学大学院情報科学研科

1. はじめに

平面グラフ G を各点が格子点上にあり，また各辺が互いに交差しない直線分となるように，さらに全ての内面が凸多角形となるように平面上に描画したい．このような描画を格子凸描画と呼ぶ．

グラフの点数を n とすると，任意の 3 連結平面グラフは，$(n-2)\times(n-2)$ の大きさの格子に格子凸描画できることが知られている．本発表では，4 連結平面グラフ G が与えられたとき，G が外周上に 4 つ以上の点を持つならば，$(n-3)\times\lfloor(n-1)/2\rfloor$ の大きさの格子に格子凸描画できることを示し，またそのような描画を求める線形時間アルゴリズムを与える．

2. 準備

点集合 V, 辺集合 Eをもつグラフ G を $G=(V,E)$ と書く．$n=|V|$ とする．任意の自然数 $k<n$ に対して，連結なグラフ G から任意の $k-1$ 点とそれに接続する全ての辺を取り除いてもグラフが非連結にならないとき，G は k**連結**であるという．$V'\subseteq V$，$E'=\{(u,v)\in E|u\in V',v\in V'\}$ なるグラフ $G'=(V',E')$ を G の V'による**誘導部分グラフ**という．

Nを非負整数の集合とし，$G=(V,E)$ を平面グラフとする．$D:V\rightarrow N\times N$は Vから 2 次元整数格子の格子点への写像であるとしよう．点 $v\in V$に対して $D(v)=(x(v),y(v))$ と書く．$x(v)$ を vの x 座標，$y(v)$ を vの y座標とする．写像 Dがグラフの各点を互いに異なる格子点に配置していて，しかも各辺の端点を結ぶ直線分が互いに交差しないとき，Dは G の**格子直線描画**であるという．全ての内面が凸多角形であるような格子直線描画を格子凸描画と呼ぼう．

描画の**幅**は，最も左に配置された点と最も右に配置された点の x 座標の差と定義する．すなわち $\max_{u,v\in V}|x(u)-x(v)|$ である．同様に，描画の**高さ**は $\max_{u,v\in V}|y(u)-y(v)|$ とする．

$G=(V,E)$ は平面グラフとし，$\pi=V_1,V_2,\cdots,V_m$は Vの分割とする．点集合 $V_1\bigcup V_2\bigcup\cdots\bigcup V_k$ による G の誘導平面部分グラフを G_kとし，G_kの外面の輪郭を C_kとする．C_mが辺 (u_1,u_2) を含み，かつ次の条件 **cd1-cd3** が成立するとき，πを辺 (u_1,u_2) を底とした G の **4 正規分割**と呼ぶ．

(cd1) V_1は G のひとつの内面の輪郭上の点集合である．

(cd2) 各 $k=1,2,\cdots,m$ に対して G_kは 2 連結であり，C_kは辺 (u_1,u_2) を含む．

(cd3) 各 $k=2,3,\cdots,m$ に対して V_kは次の (a)(b)(c) のいずれかを満たす．

- **(a)** $V_k=\{w_p,w_{p+1},\cdots,w_q\}$ は $C_k=w_1,w_2,\cdots,w_h$上の点の集合からなり，G_kにおいて $d(w_p)=d(w_{p+1})=\cdots=d(w_q)=2$ である．
- **(b)** $V_k=\{v\}$ は $C_k=w_1,w_2,\cdots,w_h$上の点 vからなり，vは G において $V_{k+1}\bigcup V_{k+2}\bigcup\cdots\bigcup V_m$ 中に 2 つ以上隣接点を持つ．
- **(c)** $V_k=\{w_p,w_{p+1},\cdots,w_q)$ は $C_k=w_1,w_2.\cdots,w_h$上の点の集合からなり，w_pと w_qは $V_{k+1}\bigcup V_{k+2}\bigcup\cdots\bigcup V_m$ 中にそれぞれ異なる 1 つの隣接点を持つが，$w_{p+1},w_{p+2},\cdots,w_{q-1}$は $V_{k+1}\bigcup V_{k+2}\bigcup\cdots\bigcup V_m$ 中に隣接点を持たない．

補題 1 外周上に 4 つ以上の点を持つ 4 連結平面グラフ $G=(V,E)$ は 4 正規分割 $\pi=V_1,V_2,\cdots,V_m$を持つ．またπは線形時間で計算できる．

3. 推移法

文献 [CK93, NN96] の格子直線描画アルゴリズムは，"推移演算" を繰り返し用いる．このような手法を**推移法**という．本章ではこの推移法について説明する．

Gを外面の輪郭に少なくとも 4 点の頂点を持つ 4 連結平面グラフとし，$\pi=V_1,V_2,\cdots,V_m$とする．推移法では正規分割の順に点の座標を決めていく．ただし，外面の輪郭 C_kが常にある保存条件を満足するようにアルゴリズムは進む．その保存条件を満足させるために，既に配置した点のいくつかを x 座標を増やす方向に移動する．このとき，G_kが平面性を失なわず，さらに内面が全て凸多角形であることを保つように，G_kのどの点をどのくらい移動する

[1]Convex Grid Drawings of Four-connected Plane Graphs
Kazuyuki Miura, Shin-ichi Nakano and Takao Nishizeki
Graduate School of Information Sciences, Tohoku University

かを決めなくてはならない．そのために，次の **U** 集合 $U(v)$ を定義する．まず，$V_1=(v_1=)w_1,w_2,\cdots,w_l(=v_2)$ について $U(w_i)=w_i(i=1,2,\cdots,l)$ とする．$k=2,\cdots,m$ に対しては，U集合を次のように再帰的に定義する．G_{k-1}に V_kを加えることを考える．G_{k-1}の外面の輪郭を $C_{k-1}=w_1(=v_1),w_2,\cdots,w_j(=v_2)$ とし，C_{k-1}上の点で V_k に隣接するものが $w_p,w_{p+1},\cdots,w_q$であるとき，最も左 (右) 側の内面を構成する点で，最も先に置かれた点を$\alpha(\beta)$ としよう．この時，U集合を次のように定義する．

$U(w_p):=\bigcup_{i=p}^{\alpha}U(w_i), U(w_q):=\bigcup_{i=\beta+1}^{q}U(w_i), U(v_1):=\{v_1\}\cup\bigcup_{i=\alpha+1}^{\beta}U(w_i), U(v_i):=\{v_i\};\quad i=2,\cdots,l.$

任意の $k\geq 1$ に対し，$U(w_1),U(w_2),\cdots,U(w_j)$ は G_kの点集合の分割になっていることに注意しよう．**推移演算** $shift(w_r)$ とは，各点 $u\in\bigcup_{i=r}^{j}U(w_i)$ の x 座標を 1 増す演算であるとする．

4. 4 連結平面グラフの格子凸描画

本章では，外周上に 4 つ以上の点を持つ 4 連結平面グラフを格子凸描画するアルゴリズムを与える．このアルゴリズムは推移法に基づいている．

本アルゴリズムでは G_1をまず描画する．次に，何回かの推移演算により G_1の描画を修正した後に，V_2中の点の位置を決め，V_2中の点に接続する辺を G_1の描画に加えて G_2の描画を得る．以下同様に，G_kの描画を推移演算により修正した後に V_{k+1}中の点の位置を決め，V_{k+1}中の点に接続する辺を G_kの描画に加えて G_{k+1}の描画を得るというようにアルゴリズムは進む．アルゴリズムの詳細は省略する．G_kの輪郭の形状等によっていくつかの場合わけがあるが，いずれの場合も高々$|V_{k+1}|$ 回の推移演算によって G_kの描画から G_{k+1}の描画を得ることが出来る．(図 1 参照)

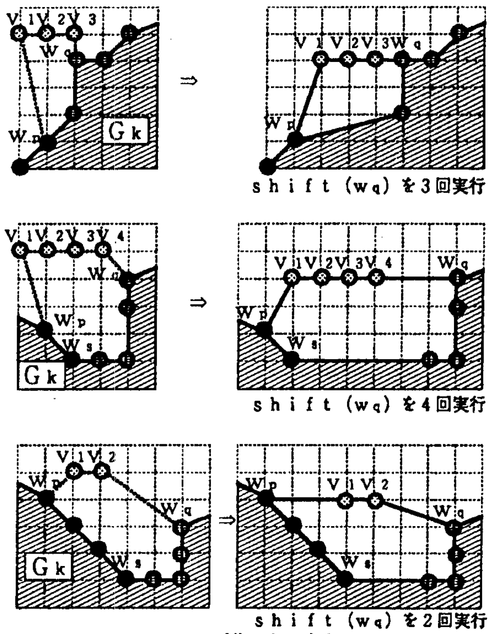

図 1: 描画の例.

定理 1 外周上に 4 つ以上の頂点を持つ 4 連結平面グラフは，$(n-3)\times\lfloor(n-1)/2\rfloor$ の格子内に，全ての内面が凸多角形であるように格子直線描画できる．

5. むすび

本発表では，外周上に 4 つ以上の点を持つような 4 連結平面グラフを，$(n-3)\times\lfloor(n-1)/2\rfloor$ の大きさの格子に格子凸描画する線形時間アルゴリズムを与えた．

参考文献

[CK93] M.Chrobak, G.Kant, *Convex Grid Drawings of 3-Connected Planar Graphs*, Technical Report RUU-CS-93-45, Department of Computer Science, Utrecht University, 1993.

[NN96] S.Nakano, T.Nishizeki, *Grid Drawings of 4-connected Plane Graphs*, Tech.Rep.of Information Processing Society of Japan, AL50-1,1996.