部分 k-木で辺素な道をみつけるアルゴリズム[1]

4 E − 6

田村 朱麗　周 暁　西関 隆夫
東北大学大学院情報科学研究科

1. はじめに

本文では部分 k-木と呼ばれるグラフのクラスを扱う．部分 k-木は木の一般化であり，普通の木は部分 1 木であり，外平面グラフや直並列グラフは部分 2 木である．部分 k-木は直並列グラフの一般化ともいえる．NP-完全問題に対しては効率の良いアルゴリズムは一般に存在しないだろうと予想されている．しかし，部分 k-木に対しては点素な道の問題を含む多くの NP-完全問題が線形時間または多項式時間で解けることがわかってきた [1,2,3,5,6,7]. しかし，端子対の数を制限しない時部分 k-木に対する辺素な道の問題を多項式時間で解けるかどうかは知られていない．本文では端子対の数が $O(\log n)$ のときに辺素な道の問題を多項式時間で解く逐次アルゴリズムを与える．ここで n はグラフの点数である．

2. 準備

本節ではいくつかの定義を与える．

定義 1 k-木は次のように再帰的に定義される．

(i). k点からなる完全グラフ K_kは，k-木である．

(ii). $G=(V,E)$ がk-木であり，Gの k点 $v_1,v_2,\dots,v_k$ は，完全部分グラフを誘導するとする．このとき新しい点 wと k本の辺 $(v_i,w), 1\le i\le k$, を G に付け加えて得られたグラフ $H=(V\cup\{w\}, E\cup\{(v_i, w) \mid 1\le i\le k\})$ も k-木である．

(iii). k-木とは，(i) から (ii) を繰り返し適用して得られたグラフである．

定義 2 部分 k-木とは k-木の部分グラフである．

明らかに部分 k-木 $G=(V,E)$ は単純グラフであり，しかも $|E|<k|V|$ である．図 1(a) に 3 木の生成過程を示し，図 1(b) に図 1(a) の部分 3 木を示す．

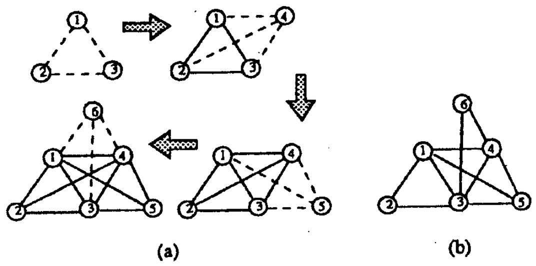

図 1: (a)3-木と (b) 部分 3-木

定義 3 グラフ $G=(E,V)$ の分解木 (*tree − decomposition*) とは，次の (i)-(iii) の条件を満たす木 $T=(V_T,E_T)$ である．ここで，V_Tは Vの部分集合族である．

(i). グラフ G の点は木 Tの少なくとも 1 つの節点 $X_i\in V_T$がある．

(ii). Gの各辺 $e=(v,w)\in E$に対し，$v,w\in X_i$なる木 Tの節点 $X_i, i\in V_T$ がある．

(iii). 全ての節点 $X_i,X_j,X_l\in V_T$に対して，もし X_iから X_lへの T上の道に X_jがあれば，$X_i\cap X_l\subseteq X_j$ である．である．

分解木 $T=(V_T,E_T)$ の木の幅とは，$max_{i\in V_T}|X_i|-1$ である．Gの木の幅とは，全ての分解木の幅のうちの最小な木の幅であり，$treewidth(G)$ と書く．ぐらふ Gが部分 k-木である必要十分条件は $treewidth(G)\le k$である．Bodlaender は次の定理を証明した [4].

定理 4 kが定数ならば，部分 k-木の幅 kの分解木は線形時間で求められる．

分解木 Tの任意の節点 X_rを選び，Tを X_rを根とする根付き木であるとみなす．各辺 $e=(v,w)\in E$に対して $v,w\in X_i$なる分解木 Tの 1 つの節点 $X_i\in V_T$を選び，$rep(e)=i$ と定義する．Tの各点 X_iについて $E(X_i)=\{e\in E \mid rep(e)=j,$ 節点 $X_i\in V_T$を根とした T の分解木に $X_j\in V_T$が入っている $\}$ と定義する．辺集合 $E(X_i)$ により誘導される G の部分グラフを $G[X_i]$ と書く．

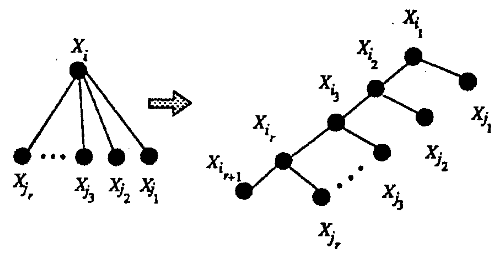

図 2: 分解木から 2 進分解木への変形

3. 逐次アルゴリズム

この節では部分 k-木の分解木 Tが既に求まっていたとする．図 2 のような木の変形を各内点に対して行うことにより，次のような性質をもつ新たな二進分解木を得ることができる．

- 分解木の点数は $O(n)$. ここで，n はグラフ G の点数である．
- 各々の内点 X_iは，必ず 2 つの子供 (例えば X_j,X_l) をもち，$X_i=X_j$ あるいは $X_i=X_l$である．

---
[1] Finding Edge-disjoint Paths in Partial k-Trees
Shurei Tamura, Xiao Zhou and Takao Nishizeki
Graduate School of Information Sciences, Tohoku University

- 各々の辺 $e=(v,w)\in E$に対し，$v,w\in V_T$なる葉が少なくとも１つTにある．

分解木から二進分解木を線形時間で求めることができる[4]．今後，分解木といった場合は変形後の二進分解木を意味することにする．

辺素な道の問題を考える．まず，辺素な道の問題を新しい型の辺彩色問題に帰着する．$C=\{1,2,\cdots,p\}$とする．部分 k-木 $G=(V,E)$ と点対 $(s_c,t_c),c\in C,s_c,t_c\in V$とする．グラフの辺彩色は，写像 $f:E\to C$である．$\forall c\in C$について，c に色付された辺に誘導された G の部分グラフを$\Gamma(G,f,c)$ とする．$\Gamma_1(G,f,c),\Gamma_2(G,f,c),\cdots,\Gamma_{q_c}(G,f,c)$ を$\Gamma(G,f,c)$ の連結成分とする．それぞれの色 $c\in C$について$\Gamma(G,f,c)$のある連結成分に s_cと t_cが含まれていれば，fを正しい彩色と呼ぶ．よって次のような補題を得る．

補題 5 グラフ G に p 本の辺素な道がある必要十分条件は，G に正しい彩色があることである．

二進分解木の内点を X_iとする．部分グラフ $G[X_i]$ の解 $f:E(G[X_i])\to C$を G の部分解と呼ぶ．この部分解 f から G の解まで拡張できるならば，fは $G[X_i]$ に対する許容解であるという．X_iでの解の色ベクトル $\mathcal{C}(X_i)$ を，次のように定義する．

定義 6 X_iの色ベクトル $\mathcal{C}(X_i)=(\mathcal{Q}_1,\mathcal{Q}_2,\cdots,\mathcal{Q}_p)$ を p 項の点集合の族 $\mathcal{Q}_1,\mathcal{Q}_2,\cdots,\mathcal{Q}_p$とする．$\mathcal{Q}_c,c\in C$は，$X_i\cup\{s_c,t_c\}$ の互いに素な部分集合の族である．

以下の (a),(b) を満たす $G[X_i]$ の彩色 fが存在すれば $\mathcal{C}(X_i)=$を active であるという．
(a)$\mathcal{Q}_c=\{\mathcal{Q}_{c_1},\cdots,\mathcal{Q}_{c_{q_c}}\}$
(b)$\mathcal{Q}_{c_j}=(X_i\cup\{s_c,t_c\})\cap V(\Gamma_j(G[X_i],f,c)$ for $\forall j,1\le j\le q_c)$

補題 7 $G[X_i]$ の二つの部分解 fと gは，同じ色ベクトル $\mathcal{C}(X_i)$ をもつとする．このとき，fが許容解である必要十分条件は，gが許容解であることである．

このように X_iの色ベクトル $C(X_i)$ を $G[X_i]$ の彩色の同値類とみなすことができる．

補題 8 部分 k-木を正しく彩色することができる，即ち p 対の辺素な道が存在する必要十分条件は，分解木の根 X_0 の計量にそれぞれの族 $\mathcal{Q}_c,c\in C$に対して $s_c,t_c\in\mathcal{Q}_{c_j}$を含むような少なくとも *1* つの active な色ベクトル $\mathcal{C}(X_0)$ が存在することである．

定義 9 X_lと X_rを X_iの子供とする．$\mathcal{C}(X_l,X_r)$ を (a),(b) を満たす $2p$ 項の点集合の族とする．
(a)$\mathcal{C}(X_l,X_r)=(\mathcal{L}_1,\cdots,\mathcal{L}_p;\mathcal{R}_1,\cdots,\mathcal{R}_p)$
(b) 各色 $c\in C$ について $\mathcal{L}_c$は，$X_l\cup\{s_c,t_c\}$ の互いに素な部分集合の族である．このような $\mathcal{C}(X_l,X_r)$ を色ベクトルペアと呼ぶ．

補題 10 X_iの $\mathcal{C}(X_l,X_r)$ が active である必要十分条件は，X_lの $\mathcal{C}(X_l)$ かつ X_rの $\mathcal{C}(X_r)$ が active なことである．

定義 11 $B_c=(\mathcal{L}_c\cup\mathcal{R}_c,E_c),L_{c_{j_l}}\in\mathcal{L}_c,1\le j_l\le l_c$かつ $R_{c_{j_r}}\in\mathcal{R}_c,1\le j_r\le r_c$が辺 $e_c\in E_c$により，結ばれる必要十分条件は $L_{c_{j_l}}\cap R_{c_{j_r}}\neq\phi$である．

$B_{c_1},\cdots,B_{c_x}$は B_cの連結成分である．
定義 12 $U(\mathcal{L}_c,\mathcal{R}_c)=\{(W_i\cup\{s_c,t_c\})\cap W_{c_j}|1\le j\le x$ かつ $(X_i\cup\{s_c,t_c\})\cap W_{c_j}\neq\phi\}$,

$$W_{c_j}=\bigcup_{S\in V(B_{c_j})}S$$

補題 13 X_iの色ベクトル $\mathcal{C}(X_i)$ が active である必要十分条件は各色 $c\in C$について $Q_c=U(\mathcal{L}_c,\mathcal{R}_c)$ であるような active な色ベクトルペア $\mathcal{C}(X_l,X_r)$ が存在することである．

Tの各節点 X_iについて，色ベクトルの表現集合の計量の種類は高々$(k+3)^{(k+4)p}$個である．各内点に対し，色ベクトルが active かどうかの判定は X_iの子供の全ての計量から $O(p(k+3)^{2(k+4)p})$ 時間で計算できる．この色ベクトルペアから X_iの色ベクトルを $O(p(k+3)^{2(k+4)p+3})$ 時間で計算できる．各葉 X_iでの全ての計量は全ての写像 $X_i\cup E(G[X_i])\to C$を考慮して $O((p+k^2)p^{k(k+1)/2})$ 時間で求められる．また，$p=O(\log n)$ とする．したがって，次の定理が成り立つ．

定理 14 部分 k-木に対して端子対の数が $O(\log n)$ ならば，辺素な道の問題を多項式時間で求めることができる．ここで，kは定数である．

参考文献

[1] S.Arnborg, B.Courcelle, A.Proskurowski, and D.Seese. An algebraic theory of graph reduction. *Journal of the Association for Computing Machinery*, Vol.40,No.5,pp.1134-1164,1193.

[2] S.Arnborg, J.Lagergran and D.Seese. Easy problems for tree-decomposable graphs. *Journal of Algorithms*,Vol.12,No.2,pp.308-340,1991.

[3] H.L.Bodleander.Polynomial algorithms for graph isomorphism and chromatic index on partial k-trees. *Journal of Algorithms*,Vol.11,No.4,pp.631-643,1990.

[4] H.L.Bodleander.A linear time algorithm for finding tree-decompositions of small treewidth. In *Proc. of the 25th Ann. ACM Symp. on Theory of Computing*,pp.226-234,San Diego,CA,1993.

[5] R.B.Borie,R.G.Parker,and C.A.Tovey.Automatic generation of linear-time algorithms form predicate calculus descriptions of problems on recursively constructed graph families.*Algorithmica*,Vol.7,pp.555-581,1992

[6] B.Courcelle.The monadic second-order logic of graphs I:Recognizable sets of finite graphs.*Information and Computation*,Vol.85,pp.12-75,1990.

[7] X.Zhou,S.Nakano,and T.Nishizeki.Edge-coloring partial k-trees.*Journal of Algorithms,to appear.*