

平面グラフで最短非交差道を求めるアルゴリズム¹

4 E - 3

草薙 良至* 鈴木 均** 西関 隆夫*

*東北大学大学院情報科学研科

**茨城大学工学部

1. はじめに

平面上に埋め込まれているグラフ、すなわち平面グラフで、指定された k 個の端子対間の互いに点素で長さの総和が最小な k 本の道を求める問題は VLSI の一層配線問題等に応用可能である。しかし、この問題は NP-完全であるので、効率のよいアルゴリズムはありそうにない。ここで、グラフの辺は VLSI の配線領域に対応している。一つの配線領域に複数の配線を通せる配線モデルでは、この一層配線問題は長さの総和が最小な“非交差道”を求める問題に帰着する。ここで、“非交差道”とは点や辺を共有するかもしれないが互いに平面上で交差はしていない道のことであり [1, 2, 3]。端子が置かれる面の個数に制約がある場合には非交差道を求める問題が効率よく解けることが期待される。本論文では k 個の端子対が平面グラフ G の指定された 3 つの面の周上にのみ存在する場合に、長さの総和最小な k 本の非交差道を求める $O(n \log n)$ 時間アルゴリズムを与える。ここで n は G の点数である。また、 k は必ずしも定数とは限らない。このアルゴリズムは、例えば VLSI 配線の最終段階に現れる、チップの外周におかれたパッドと内部ブロック周囲にあるピンを結ぶ一層配線問題に適用できる。

なお、平面グラフの二つの面の周上にのみ端子が存在する場合に長さの総和最小な k 本の非交差道を求める $O(n \log n)$ 時間のアルゴリズムが知られている [2]。

2. 準備

点集合 V 、辺集合 E をもつグラフを $G = (V, E)$ と書く。本文では G は 2-連結無向平面グラフであり、 G の辺は非負の長さをもつとする。 G の $2k$ 個の点 s_i, t_i , $1 \leq i \leq k$, を端子として指定する。道で連結したい端子 s_i と t_i からなる対 (s_i, t_i) を端子対と呼ぶ。また、端子はすべて G の指定された三つの面 f_1, f_2, f_3 の周 B_1, B_2, B_3 上にあるものとする。一般性を失うことなく f_1 を外面とする。

位相幾何学的な複雑さを避けて、“非交差道”の定義を与えよう。 k 組の端子対を結ぶ道を P_1, P_2, \dots, P_k とする。各面 f_j , $1 \leq j \leq 3$, の内部に新しい点 v_j を加え、 v_j と B_j 上の各端子を新しい辺で結ぶ。 G からこのようにして得られた平面グラフを G^+ とする。道 P_i , $1 \leq i \leq k$, の前後に上の新しい辺を 1 本ずつ付け加えて得られる G^+ の道(あるいは閉路)を P'_i とする。ここで P'_i の始点、終点は v_j , $1 \leq j \leq 3$, である。道 P'_1, P'_2, \dots, P'_k が互いに交差しないうちに、平面グラフ G の道 P_1, P_2, \dots, P_k は互いに交差しないうちに定義する。Fig.1 では道 P_1 と道 P_2 は交差していないが道 P_3 と道 P_4 は交差している。特に長さの総和が最小であるとき、 P_1, P_2, \dots, P_k を最短非交差道という。

端子対 (s_1, t_1) を結ぶ s_1 から t_1 へ行く道を P_1 と決定したとき、残りの端子対間の道 P_2, P_3, \dots, P_k で非交差な

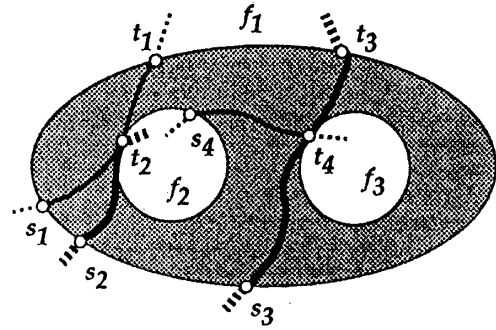


Fig. 1. 平面上の道の交差

ものを求めるには、次に定義する G の P_1 に関する切れ目グラフで残りの非交差な道 P_2, P_3, \dots, P_k を求めればよい。次のように P_1 を P'_1 と P''_1 の 2 本の道に置き換えて得られるグラフを G の P_1 に関する切れ目グラフ $G(P_1)$ と呼ぶ。まず P_1 の各点 v を 2 つの点 v' と v'' で置き換える。 P_1 上の各辺 (v_i, v_{i+1}) を 2 本の平行な辺 (v'_i, v'_{i+1}) と (v''_i, v''_{i+1}) で置き換える。 P_1 の辺ではないが、 P_1 の点 v に接続している辺 (v, w) に対して、 (v, w) が P_1 の進行方向の右側にあるならば (v', w) として置き換え、左側にあるならば (v'', w) として置き換える。ただし、点 v が s_1, t_1 以外の端子として指定されていた場合には、 v' と v'' のどちらか G^+ において v_j と隣接している方を切れ目グラフ上の端子とする。以上の操作をグラフ G に P_1 に沿って切れ目を入れるという。道 P_1 に関する切れ目グラフ $G(P_1)$ を Fig.2 に描く。

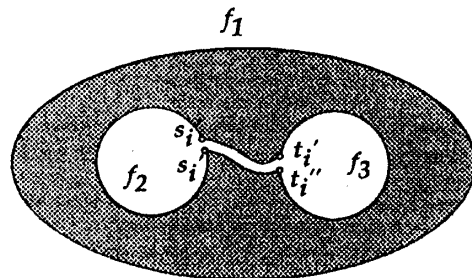


Fig. 2. 切れ目グラフ

¹An algorithm for finding non-crossing paths with shortest distance in plane graph

Yoshiyuki Kusakari*, Hitoshi Suzuki** and Takao Nishizeki*

*Graduate School of Information Sciences, Tohoku University

**Faculty of Engineering, Ibaraki University

3. 3面の最短非交差道

すべての端子が2つの面の周上にだけある場合に最短非交差道を求めるアルゴリズム [2] を F2 と書くことにする。本文のアルゴリズムでは異なる面に2つの端子をもつ端子対間の道を定め、その道によって G に切れ目を入れることで、3つの面の周上に端子がある問題をすべての端子が2つの面の周上にだけある場合の問題に帰着させ、F2 を用いて残りの問題を解く。

B_p と B_q の周に端子を持つ端子対の集合を $S_{pq} = \{(s_i, t_i) | s_i \in V(B_p) \text{ かつ } t_i \in V(B_q), \text{ または } t_i \in V(B_p) \text{ かつ } s_i \in V(B_q)\}$ と書く。一般性を失うことなく、以下の4通りの場合だけがあるとしてよい。

場合 1: $S_{12} = \phi, S_{13} = \phi, S_{23} = \phi$

場合 2: $S_{12} \neq \phi, S_{13} = \phi, S_{23} = \phi$

場合 3: $S_{12} \neq \phi, S_{13} \neq \phi, S_{23} = \phi$

場合 4: $S_{12} \neq \phi, S_{13} \neq \phi, S_{23} \neq \phi$

場合 1 および場合 2 ならば [2] のアルゴリズムと同様の方法で最短非交差道を求めることができるので場合 3 と場合 4 だけを考える。

3.1 場合 3

$S_{12} = \{(s_1, t_1), (s_2, t_2), \dots, (s_a, t_a)\}$, $S_{13} = \{(s_{a+1}, t_{a+1}), \dots, (s_{a+b}, t_{a+b})\}$ であり、 s_1, s_2, \dots, s_{a+b} がこの順で B_1 上に反時計回りに現れるとして一般性を失わない。 $(s_i, t_i) \in S_{12} \cup S_{13}$ とし、 G 上の s_i から t_i までの最短路を P_i^* とする。 P_i^* に関する G の切れ目グラフ $G(P_i^*)$ 上の対応する G の2本の道をそれぞれ P_i^+ , P_i^- とする。次の補題が成り立つ。

補題 1 $P_1^*, P_1^+, P_1^-, P_{a+1}^*, P_{a+1}^+$ あるいは P_{a+1}^- を含むような最短非交差道が G に存在する。□

3.2 場合 4

$S_{12} = \{(s_1, t_1), (s_2, t_2), \dots, (s_a, t_a)\}$, $S_{13} = \{(s_{a+1}, t_{a+1}), \dots, (s_{a+b}, t_{a+b})\}$, $S_{23} = \{(s_{a+b+1}, t_{a+b+1}), \dots, (s_{a+b+c}, t_{a+b+c})\}$ であり、 s_1, s_2, \dots, s_{a+b} がこの順で外周 B_1 上に反時計回りに現れ、 $t_1, t_2, \dots, t_a, s_{a+b+1}, s_{a+b+1}, \dots, s_{a+b+c}$ がこの順で B_2 上に反時計回りに現れるとして一般性を失わない。 $i, j \in \{1, a+1, a+b+1\}$, $i \neq j$ とする。 G 上の s_i から t_i までの最短路を P_i^* とする。 P_i^* に関する G の切れ目グラフ $G(P_i^*)$ 上の s'_i から t'_i までの最短路と s''_i から t''_i までの最短路に対応する G の道をそれぞれ P_i^+ , P_i^- とする。 $G(P_i^*)$ 上の s_j から t_j までの最短路を P_{ij}^* とする。 P_{ij}^* に関する $G(P_i^*)$ の切れ目グラフ $G(P_i^*)(P_{ij}^*)$ 上の s'_j から t'_j までの最短路と s''_j から t''_j までの最短路に対応する G の2本の道をそれぞれ P_{ij}^+, P_{ij}^- とする。次の補題が成立する。

補題 2 $P_i^*, P_i^+, P_i^-, P_{ij}^+, P_{ij}^-, i, j \in \{1, a+1, a+b+1\}$, $i \neq j$, のいずれか1本を含むような最短非交差道が G に存在する。□

3.3 アルゴリズム

補題 1, 2 より最短非交差道を求めるアルゴリズムが以下で与えられる。

Procedure F3

begin

if $S_{12}, S_{13} = \phi$ then

F2 と同様の方法で最短非交差道を求める;

else if $S_{12}, S_{13} \neq \phi, S_{23} = \phi$ then

$P_1^*, P_1^+, P_1^-, P_{a+1}^*, P_{a+1}^+, P_{a+1}^-$ を求める;

それぞれの道について G の切れ目グラフを作成し、

それぞれのグラフで F2 を実行して求められた6種類の非交差道のうちで道の長さの総和が最小なものを出力する;

else if $S_{12}, S_{13}, S_{23} \neq \phi$ then

$i = 1, a+1, a+b+1$ とし、

$i \neq j = 1, a+1, a+b+1$ とする;

$P_i^*, P_i^+, P_i^-, P_{ij}^+, P_{ij}^-$ を求める;

それぞれの道について G の切れ目グラフを作成し、

それぞれのグラフで F2 を実行して求められた5種類の非交差道のうちで道の長さの総和が最小のものを P_{ij} とする;

$P_{ij}, i, j \in \{1, a+1, a+b+1\}, i \neq j$, のうちで道の長さの総和最小のものを出力する。

end

3.4. 計算量

アルゴリズム F3 では最短路を高々定数本だけ求め、F2 を定数回実行する。F2 は $O(n)$ の記憶量を用いて $O(n \log n)$ 時間で最短非交差道を求めるので F3 も $O(n)$ の記憶量を用いて $O(n \log n)$ 時間で最短非交差道を求めることができる。

4. むすび

本文では、 n 点からなる平面グラフにおいて k 個の端子対が3つの面の周上にのみ存在するときに、最短非交差道を効率良く解くアルゴリズムを与えた。

4つ以上の面に端子対が存在する場合に、最短非交差道を求める効率の良いアルゴリズムを開発することが今後の課題である。

参考文献

- [1] D.T. Lee, C.F. Shem, C.D. Yang, and C.K. Wong, "Non-crossing paths problems," *Manuscript, Dept. of EECS, Northwestern Univ.*, 1991.
- [2] J. Takahashi, H. Suzuki, and T. Nishizeki, "Shortest non-crossing paths in plane graphs," *Algorithmica*, to appear.
- [3] J. Takahashi, H. Suzuki, and T. Nishizeki, "Shortest non-crossing rectilinear paths in plane regions," *Int. J. of Computational Geometry & Applications*, to appear.