最小被覆問題を表現する行列のサイズの縮小法*

4B－8

吉田清明　朱雀保正†
久留米工業大学 工学部‡

1. はじめに

代表的なＮＰ完全問題の一つに最小被覆問題[1]がある．最小被覆問題は行列$T=(t_{ij})$，$t_{ij}\in\{1,0\}$から，できるだけ少ない数の行ベクトルを選んで和をとるとき，その要素がすべて１以上となるようにする問題として表現できる．本稿では，行縮小作用素Rと列縮小作用素Cを定義し，これらを行列Tに繰り返し作用させることにより，最小被覆問題の意味でTと等価でサイズが小さい行列T'を決定論的に得る方法を提出する．また，可能な限り縮小化して得られた行列のサイズはRとCを作用させる順番に依存せず一定となることを証明する．最後に，ISCAS'85ベンチマーク回路より生成された故障表[2]に本縮小法を適用し，その有効性を示す．

2. 行列

行列$T=(t_{ij})$において，$t_{ij}\in\{1,0\}$とする．また，行列Tの第i行ベクトルを$\boldsymbol{r}_i$，第j列ベクトルを$\boldsymbol{c}_j$と書く．

3. 行の包含関係

すべてのjについて

$$t_{lj}=1\rightarrow t_{kj}=1 \qquad (1)$$

が成り立つならば，k行はl行を包含するといい，

$$\boldsymbol{r}_k\supseteq\boldsymbol{r}_l \qquad (2)$$

と書く．

4. 行の縮小

行列Tにおいて，$\boldsymbol{r}_k\supseteq\boldsymbol{r}_l$のとき，$\boldsymbol{r}_l$を行列から取り除くことを行の縮小という．行列$T$に対して行の縮小を繰り返すと，それ以上縮小できない行列が得られる．この行列をRTと書き，Rを行縮小作用素という．明らかに次式が成り立つ．

$$R^nT\equiv RT,\qquad n\text{は正整数} \qquad (3)$$

また，次の定理が成り立つ．

定理１　行列RTは，一意に定まる．

5. 列の包含関係

すべてのiについて

$$t_{il}=0\rightarrow t_{ik}=0 \qquad (4)$$

が成り立つならば，k列はl行を包含するといい，

$$\boldsymbol{c}_k\supseteq\boldsymbol{c}_l \qquad (5)$$

と書く．

6. 列の縮小

行列Tにおいて，$\boldsymbol{c}_k\supseteq\boldsymbol{c}_l$のとき，$\boldsymbol{c}_l$を行列から取り除くことを列の縮小という．行列$T$に対して列の縮小を繰り返すと，それ以上縮小できない行列が得られる．この行列をCTと書き，Cを列縮小作用素という．明らかに次式が成り立つ．

$$C^nT\equiv CT,\qquad n\text{は正整数} \qquad (6)$$

また，次の定理が成り立つ．

定理２　行列CTは，一意に定まる．

7. 行列の縮小

作用素RとCは繰り返し行列Tに適用することができる．この繰り返しは，二つの型に分類できる．

［I型］行列TにまずRを適用するもの：

$$RT,\ CRT,\ RCRT,\ \cdots \qquad (7)$$

［II型］行列TにまずCを適用するもの：

$$CT,\ RCT,\ CRCT,\ \cdots \qquad (8)$$

何れの型も作用素を繰り返し適用すると，行列Tは縮小されていくが，ある回数適用するとそれ以上は縮小されなくなる．このとき次の定理が成り立つ．

定理３　I型の縮小を繰り返し，最後に得られる行列をT_I，II型の縮小から得られる行列をT_{II}とする．こととき

$$T_I\equiv T_{II} \qquad (9)$$

が成り立つ．ただし，縮小の途中で得られる行列において，すべての要素が０である行または

---

*A Method to Reduce the Size of Matrices Which Represent the Minimum Cover Problem

†Kiyoaki YOSHIDA and Yasumasa SUJAKU
‡Kurume Institute of Technology, 2228 Kamitsumachi, Kurume, Fukuoka 830, JAPAN

列ベクトルが生じた場合にはこれを削除する．また，もしある行k行と他のある行l行とが等しくなった場合には，k行とl行は等価であるとし，一般性を失わずに，若い番号の行を残し，他を行列から取り除く，と約束する．列の場合も同様に考える．

［証明］縮小の任意の段階で現われる行列T'において，その行番号の集合を$r(T')$と書き，列番号の集合を$c(T')$と書くことにする．これらについて，次の関係が成り立つことは容易に判る．

(r1) $r(T') = r(CT')$

(r2) $r(T') \supseteq r(RT')$

(r3) $r(RT') \supseteq r(RCT')$

(c1) $c(T') = c(RT')$

(c2) $c(T') \supseteq c(CT')$

(c3) $c(CT') \supseteq c(CRT')$

また，行列Tに対する縮小の任意の段階で現われる行列T'は，nを非負の整数として，次の四つの型の行列のうちの何れかである．

(T1) $(RC)^n T$

(T2) $(RC)^n RT$

(T3) $C(RC)^n T$

(T4) $C(RC)^n RT$

これらの行列に対して，上述の関係(r1)〜(c3)を用いると，次の包含関係が得られる．

$$\begin{aligned} r((RC)^n T) &= r(C(RC)^n T) \supseteq r((RC)^n RT) \\ &= r(C(RC)^n RT) \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} c((RC)^n T) &\supseteq c((RC)^n RT) \supseteq c(C(RC)^n T) \\ &\supseteq c(C(RC)^n RT) \end{aligned} \tag{11}$$

さらに，次の式が成り立つ．

$$r((RC)^n RT) \supseteq r((RC)^{n+1} T) \tag{12}$$

$$c(C(RC)^n T) = c((RC)^{n+1} T) \tag{13}$$

こうして，縮小の任意の段階で現われるすべての行列について，行番号の包含関係が得られた．これら二つの関係式により，定理3が満たされることが容易に判る．■

8. 最小被覆問題への適用

行列Tにおいて，いくつかの行番号の集合Sについて行ベクトルの和

$$r_S = \sum_{i \in S} r_i \tag{14}$$

を作ったとき，この和r_Sの要素がすべて1であるとき，これらの行ベクトルは行列Tの列を被覆するという．行列Tの列を被覆する行番号の集合Sのうち，その要素の数が最小の集合を最小被覆といい，これをS^*と書き，S^*を求める問題を最小被覆問題という．

定理4　行列Tの最小被覆S^*が与えられると，行の包含関係と等価関係を用いて，行列T_IまたはT_{II}の中にS^*と同じ要素数で，かつ行列Tの最小被覆となる行番号の集合を求めることができる．

9. 故障表への適用結果

ISCAS'85のベンチマーク用回路に同時故障シミュレーション(シミュレーション回数は1000回)を適用し，表1の故障表1を作成した．これに本稿の縮小法を適用することにより，故障表2を得た．計算機にはsun4/1000（主記憶256MB，ただしマルチスレッドは不使用）を使用した．CPU時間の測定にはUNIXのtimeコマンドを使用した．表1の縮小率の定義は次式のとおりである．

$$\text{縮小率} = \frac{(\text{縮小前のサイズ}-\text{縮小後のサイズ})}{\text{縮小前のサイズ}} \times 100\ (\%)$$

表1の実験結果より，本稿の縮小法は，与えらた最小被覆問題を等価でより小さな問題に変換するのに縮小率の面で有効であることが判る．

表1 実験結果

回路名	故障表1 (行×列)	故障表2 (行×列)	縮小率 (%)	CPUTIME (sec)
e432	1000 × 520	410 × 119	90.62	584.0
e499	1000 × 749	74 × 59	99.42	1577.0
e880	1000 × 920	988 × 209	77.56	2351.0
e1355	1000 × 1543	98 × 83	98.03	2019.0
e1908	1000 × 1795	89 × 899	99.47	2301.0
e2670	1000 × 2311	1000 × 402	99.56	7535.0
e3540	1000 × 3243	707 × 320	93.02	6730.0
e5315	1000 × 5277	983 × 525	90.22	21125.0
e6288	1000 × 7710	1000 × 2002	74.03	76283.0
e7552	1000 × 6980	864 × 529	93.45	19219.0

10. おわりに

最小被覆問題を表現する行列Tに対して，行縮小作用素Rと列縮小作用素Cを定義し，これらを行列Tに繰り返し作用させ，可能な限り縮小化して得た行列のサイズはRとCを作用させる順番に依存せず一定となることを証明した．

参考文献

[1] Garey, M. and Jonson, D.:*Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W.H.Freeman (1979).

[2] 樹下行三，藤原秀雄：ディジタル回路の故障診断（上），工学図書(1983).