

一変数方程式導出計算の効率向上に関する考察

4 B - 4

沢田浩之

機械技術研究所

1 はじめに

多変数連立代数方程式の数値解法においては、

- (1) 解をすべて求められること (完全性)
- (2) 間違った解を求めないこと (健全性)

が重要となる。著者が提案した外接球法 [3] は、完全かつ健全な数値解法であるが、一変数方程式導出計算を数多く実行する必要がある、その効率向上が応用へ向けての大きな鍵となる。本稿では、一変数方程式導出計算の効率向上手法とその実験結果について述べる。

本稿の構成は以下の通りである。まず第2章において、現在確立している二つの一変数方程式導出計算法を紹介する。次に、第3章で本稿で提案する効率向上手法についての説明を行ったのち、第4章で実験結果を示す。

2 一変数方程式導出計算法

本章では、現在確立している二つの一変数方程式導出計算法、すなわち辞書式グレブナ基底法と係数決定法 [2] を紹介する。有限個数の解を持つ連立代数方程式を式 (1) とする。

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

2.1 辞書式グレブナ基底法

変数間順位として、変数 x_j の順位を最低とした辞書式順序を用いる。この変数間順位における

式 (1) のグレブナ基底を計算すると、 x_j に関する一変数方程式が導かれる。

2.2 係数決定法

変数 x_j に関する一変数方程式として、式 (2) を仮定する。

$$\sum_{i=0}^k a_i x_j^i = 0. \quad (2)$$

x_j^i ($0 \leq i \leq k$) を、式 (1) の全次数順序のグレブナ基底 G によって書き換える。その書き換え結果を式 (2) に代入し、式 (2) が成立するように係数 a_i を決定する。自明でない a_i が存在すれば、その値を式 (2) に代入することにより、 x_j に関する一変数方程式が得られる。自明な a_i しか存在しなければ、 k の値を1増やして、同じ作業を繰り返す。

3 効率向上手法

本章では、前章で紹介した各々について、効率向上手法の提案を行う。

3.1 辞書式グレブナ基底法の効率向上手法

1. 剰余演算シミュレーション [4]

グレブナ基底計算における書き換え操作の際、実際の係数で計算を行う前に、ある素数の剰余系において書き換えを行う。剰余系においてある多項式が0に書き換えられれば、実際にも0に書き換えられるものとみなし、実際の係数を用いた計算を省略する。

3.2 係数決定法の効率向上手法

1. 剰余演算シミュレーション

係数決定法では、自明でない a_i が存在する

Study of improving efficiency of computing
uni-variate equations
Hiroyuki Sawada
Mechanical Engineering Laboratory
Namiki 1-2, Tsukuba, Ibaraki 305, Japan

表 1: 各手法における計算時間 (秒)

問題番号	辞書式グレブナ基底法		係数決定法			
	剰余演算なし	剰余演算あり	剰余演算なし		剰余演算あり	
			全次数順序の調整なし	全次数順序の調整あり	全次数順序の調整なし	全次数順序の調整あり
(1)	4	2	112	1	113	1
(2)	4170	245	12h 後異常終了	400	12h 後異常終了	94
(3)	1	1	7	1	7	1
(4)	186186	51707	39h 後異常終了	198	39h 後異常終了	176

か否かを調べるために、行列の階数計算を行う必要がある。この階数計算を、実際の係数で実行する前に、ある素数の剰余系において計算する。剰余系において階数が変数の数よりも小さくなったときに、実際の係数で階数を計算する。

2. 変数間順位の調整

全次数順序のグレブナ基底計算において、与えられる変数間順位は任意である。変数 x_j に関する一変数方程式を計算する場合、 x_j の順位を最も低く設定し直し、あらためてグレブナ基底を計算する。このあらためて計算されたグレブナ基底を用いて x_j の書き換えを行い、一変数方程式の係数 a_i を決定する。

4 実験結果

以下に示すように、辞書式グレブナ基底法については二通り、係数決定法については四通りの方法について比較実験を行った。

1. 辞書式グレブナ基底法

(1) 剰余演算シミュレーションの有無

2. 係数決定法

(1) 剰余演算シミュレーションの有無

(2) 変数間順位の調整の有無

結果を表 1 に示す。なお、ここで用いた問題は、

- (1) Katsura-4 [1]
- (2) Katsura-5 [1]
- (3) Cyclic 5-roots
- (4) Cyclic 6-roots

である。

5 おわりに

一変数方程式導出計算の効率向上手法として、

- (1) 剰余演算シミュレーションの導入
- (2) 変数間順位の調整

を提案し、比較実験を行った。その結果、

1. これらの手法が一変数方程式導出計算の効率向上に関して有効であること
2. “係数決定法 & 剰余演算シミュレーション & 変数間順位の調整” の組み合わせが最適であること

が確認された。

参考文献

- [1] Boege, W et.al.: *Some Examples for Solving Systems of Algebraic Equations by Calculating Groebner Bases*, *J. Symbolic Computation*, pp.83-98 (1986).
- [2] Buchberger, B.: *Gröbner bases: An Algorithmic Method in Polynomial Ideal Theory*, *Technical Report, RISC-LINZ* (1983).
- [3] 沢田浩之: 新たな条件式の導入による多変数連立代数方程式の解法, *情報処理学会論文誌*, Vol.36, No.12, pp.2761-2770 (1995).
- [4] 野呂正行: モジュラ演算によるグレブナ基底計算の高速化, *研究集会 - 数式処理における理論と応用の研究 -*, 京都大学数理解析研究所 (1993).