トーラスの耐故障固定ルーティングについて*

3B－7

殿岡 隆　　上野 修一†
東京工業大学 電気・電子工学科‡

1 はじめに

通信網を表現するグラフの各順序点対に対して，その点対を結ぶパス(ルートという)を割り当てる関数を固定ルーティング(以後単にルーティングという)という．各点対間の通信はルートを用いて行われるが，故障が発生したルートは正常な連続したルートの系列で代替する．このときの通信遅延を評価する尺度として正常ルートグラフの直径が用いられている．

小文では，並列計算機の代表的な相互結合網である2次元トーラスの耐故障ルーティングを提案し，故障数が高々3であるならば正常ルートグラフの直径が高々2であることを示すと共に，プロセッサ数が奇数の場合には，故障数が高々5で正常な部分が連結しているならば正常ルートグラフの直径が高々4であることを示す．

2 耐故障固定ルーティング

グラフ[有向グラフ]Gの点集合と辺集合[有向辺集合]をそれぞれ$V(G)$と$E(G)[A(G)]$で表す．グラフ[有向グラフ]Gの2点x, y間の最短パス[最短有向パス]の長さを$\mathrm{dist}_G(x,y)$で表す．$D(G)=\max\{\mathrm{dist}_G(x,y)|x,y\in V(G)\}$を$G$の直径という．

グラフGの各順序点対(x,y)に対して，xとyを結ぶパス$\rho(x,y)$を割り当てる関数ρをGの(固定)ルーティングといい，パス$\rho(x,y)$をルートという．故障集合$F\subseteq V(G)\cup E(G)$は，GからFの点と辺をすべて除去して得られるグラフが連結であるとき，非分離であるという．グラフG，ルーティングρと故障集合Fに対して，正常ルートグラフ$R(G,\rho)/F$は以下のように定義される有向グラフである:

$$V(R(G,\rho)/F)=V(G)-F; A(R(G,\rho)/F)=\{(x,y)|(V(\rho(x,y))\cup E(\rho(x,y)))\cap F=\emptyset\}.$$

Gのルーティングρの耐故障性を$D(R(G,\rho)/F)$を用いて評価するが，故障集合FがGを分離するときには耐故障性を保証することは原理的に不可能であるので，以後故障集合は非分離であると仮定する．Gのルーティングρは，要素数f以下の任意の(非分離)故障集合Fに対して，$D(R(G,\rho)/F)\leq d$であるとき，(d,f)-耐故障であるという．

$2k^2$以上の点からなる任意のk-連結グラフには$(3,k-1)$-耐故障ルーティングが存在すること[2]，n次元ハイパーキューブQ_nには$(2,n-1)$-耐故障ルーティングが存在すること[1]，Q_nには$(4,2n-3)$-耐故障ルーティングが存在すること[4]，及び十分大きな点数(約180)の2次元トーラスには$(2,3)$-耐故障ルーティングが存在すること[3]などが知られている．

Q_nと2次元トーラスの連結度はそれぞれnと4であること，及びk-連結グラフの要素数$k-1$以下の任意の故障集合は非分離であることに注意されたい．また，一般に$D(R(G,\rho)/F)\geq 2$であるので，任意の$f\geq 1$に対して$(2,f)$-耐故障ルーティングは最適である．

小文では，2次元トーラスのルーティングを提案し，その$(2,3)$-耐故障性と$(4,5)$-耐故障性について考察する．

3 トーラスのルーティング

(2次元)$m\times n$トーラス$T(m\times n)$は以下のように定義される:

$$V(T(m\times n)) = \{(r,c)|\ 0\leq r\leq m-1, 0\leq c\leq n-1\};$$
$$E(T(m\times n)) = \{((r_1,c_1),(r_2,c_2))|\ r_1=r_2, c_1-c_2\equiv \pm 1 \pmod{n} \text{ or } c_1=c_2, r_1-r_2\equiv \pm 1 \pmod{m}\}.$$

*On Fault-Tolerant Fixed Routing in Tori
†Takashi Tono-oka and Shuichi Ueno
‡Department of Electrical and Electronic Engineering, Tokyo Institute of Technology

小文で提案する $T(m\times n)$ のルーティングρ_Tは以下のように定義される．任意の2点 $x=(r_x,c_x), y=(r_y,c_y)\in V(T(m\times n))$ に対して，ルート$\rho_T(x,y)$ を以下のように定義する:

(1-1)$r_x=r_y, c_x<c_y, c_y-c_x\leq\lceil\frac{n-1}{2}\rceil$ のとき:

$\rho_T(x,y)=(x=(r_x,c_x),(r_x,c_x+1),\cdots,(r_x,c_y-1),(r_x,c_y)=(r_y,c_y)=y)$

(1-2)$r_x=r_y, c_x>c_y, c_x-c_y\leq\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$ のとき:

$\rho_T(x,y)=(x=(r_x,c_x),(r_x,c_x-1),\cdots,(r_x,c_y+1),(r_x,c_y)=(r_y,c_y)=y)$

(1-3)$r_x=r_y, c_x<c_y, c_y-c_x>\lceil\frac{n-1}{2}\rceil$ のとき:

$\rho_T(x,y)=(x=(r_x,c_x),(r_x,c_x-1),\cdots,(r_x,0),(r_x,n-1),\cdots,(r_x,c_y+1),(r_x,c_y)=(r_y,c_y)=y)$

(1-4)$r_x=r_y, c_x>c_y, c_x-c_y>\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$ のとき:

$\rho_T(x,y)=(x=(r_x,c_x),(r_x,c_x+1),\cdots,(r_x,n-1),(r_x,0),\cdots,(r_x,c_y-1),(r_x,c_y)=(r_y,c_y)=y)$

(2-1)$c_x=c_y, r_x<r_y, r_y-r_x\leq\lceil\frac{m-1}{2}\rceil$ のとき:

$\rho_T(x,y)=(x=(r_x,c_x),(r_x+1,c_x),\cdots,(r_y-1,c_x),(r_y,c_x)=(r_y,c_y)=y)$

(2-2)$c_x=c_y, r_x>r_y, r_x-r_y\leq\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor$ のとき:

$\rho_T(x,y)=(x=(r_x,c_x),(r_x-1,c_x),\cdots,(r_y+1,c_x),(r_y,c_x)=(r_y,c_y)=y)$

(2-3)$c_x=c_y, r_x<r_y, r_y-r_x>\lceil\frac{m-1}{2}\rceil$ のとき:

$\rho_T(x,y)=(x=(r_x,c_x),(r_x-1,c_x),\cdots,(0,c_x),(m-1,c_x),\cdots,(r_y+1,c_x),(r_y,c_x)=(r_y,c_y)=y)$

(2-4)$c_x=c_y, r_x>r_y, r_x-r_y>\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor$ のとき:

$\rho_T(x,y)=(x=(r_x,c_x),(r_x+1,c_x),\cdots,(m-1,c_x),(0,c_x),\cdots,(r_y-1,c_x),(r_y,c_x)=(r_y,c_y)=y)$

(3)$r_x\neq r_y, c_x\neq c_y$のとき: $\rho_T(x,y)$ は$\rho_T(x,(r_x,c_y))$ と$\rho((r_x,c_y),y)$ を結合したルート．

ρ_Tのルートはすべて最短パスであることに注意されたい．ρ_Tの耐故障性に関する以下の定理を証明することができる．

定理 1 任意の自然数 m,n に対して，ρ_Tは $T(m\times n)$ の $(2,3)$-耐故障ルーティングである． □

定理 2 任意の奇数 $m,n\geq 7$ に対して，ρ_Tは $T(m\times n)$ の $(4,5)$-耐故障ルーティングである． □

なお，ρ_Tが $T(m\times n)$ の $(4,f)$-耐故障ルーティングであるような f の最大値は不明であるが，ρ_Tは $T(m\times n)$ の $(4,9)$-耐故障ルーティングではないことを示すことができる．また，m あるいは n が偶数であるときのρ_Tの $(4,5)$-耐故障性に関する考察は今後の課題である．

謝辞： 日頃御指導頂く梶谷洋司教授に感謝する．本研究は，東工大の CAD21 研究体の研究課題の一部として行なわれたものである．なお，本研究は電気通信普及財団の助成を受けて行われた．

参考文献

[1] D. Dolev, J. Y.Halpern, B. Simons, and H.R. Strong. A new look at fault-tolerant network routing. *Information and Computation*, Vol. 72, pp. 180–196, 1987.

[2] M. Imase and Y. Manabe. Fault-tolerant routings in a k-connected network. *Information Processing Letters*, Vol. 28, pp. 171–175, 1988.

[3] K. Kawaguchi and K. Wada. New results in graph routing. *Information and Computation*, Vol. 106, pp. 203–233, 1993.

[4] A. Sengupta and S. Viswanathan. On fault-tolerant fixed routing in hypercubes. *Information Processing Letters*, Vol. 51, pp. 93–99, 1994.