空間不変3次元光結合によるハイパーキューブの最適実現*

3B－6

多湖 真一郎　　上野 修一†
東京工業大学 電気・電子工学科‡

1 はじめに

並列計算機の情報処理の大容量化と高速化に伴い，通信網の電気結合による実現の様々な問題点が指摘され，これらの問題を解決する手段として通信網の光結合による実現が提案されている．小文では，並列計算機の相互結合網としてよく用いられているハイパーキューブを光結合で最適に実現する方法について考察する．

よく知られているように，自由空間を用いた光結合はチップ間配線やボード間配線の実現に適している．また，結合パターンが正則である空間不変光結合は，レンズやホログラムのような代表的な光学部品の性能に適しており，光学的実現が容易であることが知られている．そこで小文では，以下のようなモデルを用いて相互結合網を最適に実現する問題について考察する．ここで用いるモデルは，プロセッサ及び各プロセッサに付随する光源といくつかの受光素子を2次元アレイ状に配置した二つの配列平面を3次元空間内に向かい合わせて平行に配置すると共に，これらの配置平面の中間に空間不変光結合を実現する光結合モジュールを配置して相互結合網を実現するものである [1] [2].

上の空間不変3次元光結合による実現(以後単に実現という)の複雑度を支配しているのは，光結合モジュールにおける光分岐数と配列平面の面積である．N点から成るハイパーキューブQ_Nは，$2\log N-1$の光分岐数と面積$O(N\log^4 N)$の配列平面を用いて実現できることが知られている [1] [2].

小文では，Q_Nの実現に対して，$2\log N-1$ と $N(\log N+1)/2$ がそれぞれ光分岐数と配列平面の面積の下界であることを示すと共に，$2\log N$の光分岐数と面積 $N\log N+N/2$ の配列平面を用いたQ_Nの(オーダの意味で) 最適な実現を示す．

2 グラフ

グラフGの点集合と辺集合をそれぞれ$V(G)$と$E(G)$で表す．$V(G)$が2つの独立集合XとYに分割できるとき，Gを2部グラフといい，(X,Y)をGの2分割という．$v\in V(G)$に対して，$\deg_G(v)=|\{u\mid u\in V(G),(u,v)\in E(G)\}|$ をvの次数という．すべての点の次数が等しいグラフを正則グラフという．特に，すべての点の次数がkであるグラフをk-正則グラフという．よく知られているように，Gがk-正則な2部グラフであるとき，$E(G)$はk個の完全マッチング$M_1,M_2,\cdots,M_k$に分割できる．M_iに属す辺をi次辺という $(i=1,2,\cdots,k)$.

3 定式化

ここでは，正則な2部グラフで表現される相互結合網の実現を定式化する．Gをk-正則な2部グラフとし，(X,Y) を G の2分割とする．G の点はプロセッサに対応し，辺は通信線に対応している．各 $v\in V(G)$ に対して，$\Gamma(v)=\{v^s,v^1,v^2,\cdots,v^k\}$ と定義する．v^sはvに付随する光源に対応し，v^iはvに接続するi次辺に付随する受光素子に対応している．さらに，$\tilde{X}=\bigcup_{x\in X}\Gamma(x)$, $\tilde{Y}=\bigcup_{y\in Y}\Gamma(y)$ と定義する．$\tilde{X}$と$\tilde{Y}$はそれぞれの配列平面に配置するすべての光学素子の集合に対応している．$\boldsymbol{Z}$と$\boldsymbol{N}$をそれぞれ整数の集合と正整数の集合とする．1対1写像$\phi:\tilde{X}\to\boldsymbol{N}^2$と$\psi:\tilde{Y}\to\boldsymbol{N}^2$で$\tilde{X}$と$\tilde{Y}$のそれぞれの配列平面への配置を表す．また，$\boldsymbol{C}\subseteq\boldsymbol{Z}^2$を光分岐を表現するベクトルの集合とする．光学的制約により，$\boldsymbol{C}$は次の条件を満たす: $\boldsymbol{c}\in\boldsymbol{C}$ならば$-\boldsymbol{c}\in\boldsymbol{C}$. $w,h,i,j\in\boldsymbol{N}$に対して，$[w\times h]_{i,j}=\{(n,m)\mid w(i-1)<n\le wi,h(j-1)<m\le hj\}$ と定義すると，$\{[w\times h]_{i,j}\mid i,j\in\boldsymbol{N}\}$ は$\boldsymbol{N}^2$の分割である．$[w\times h]_{i,j}$を単位領域という．与えられたwとhに対して，以下の4つの条件を満足する$\langle\phi,\psi,\boldsymbol{C}\rangle$を$G$の(空間不変3次元光結合による)実現という:

1. 任意の$x\in X[y\in Y]$に対して，$\phi(\Gamma(x))[\psi(\Gamma(y))]$ は一つの単位領域に含まれる;
2. 任意の単位領域は，高々一つの$\phi(\Gamma(x))$と高々一つの$\psi(\Gamma(y))$ しか含まない;
3. (x,y)がi次辺であるとき，かつそのときに限って，$\psi(y^i)=\phi(x^s)+\boldsymbol{c}$ となる$\boldsymbol{c}\in\boldsymbol{C}$が存在する;
4. (x,y)がi次辺であるとき，かつそのときに限って，$\phi(x^i)=\psi(y^s)+\boldsymbol{c}'$ となる$\boldsymbol{c}'\in\boldsymbol{C}$が存在する．

wとhを十分大きくとれば，Gの実現は常に存在することが簡単に分かる．Gの実現$\langle\phi,\psi,\boldsymbol{C}\rangle$の複雑度

*Optimal Realization of Hypercubes by Three-Dimensional Space-Invariant Optical Interconnections
†Shin'ichiro Tago and Shuichi Ueno
‡Department of Electrical and Electronic Engineering, Tokyo Institute of Technology

を $|\boldsymbol{C}|$ と配列平面の面積:

$$A\langle\phi,\psi,\boldsymbol{C}\rangle = \max\{x \mid (x,y)\in\phi(\tilde{X})\cup\psi(\tilde{Y})\}\times\max\{y \mid (x,y)\in\phi(\tilde{X})\cup\psi(\tilde{Y})\}$$

で評価する．目標は，与えられたグラフ G に対して，$|\boldsymbol{C}|$ 及び $A\langle\phi,\psi,\boldsymbol{C}\rangle$ を共に最小とする実現 $\langle\phi,\psi,\boldsymbol{C}\rangle$ を求めることである．

4 ハイパーキューブ

$N=2^n$ 個の点からなる n 次元キューブ Q_N は次のように定義される: $V(Q_N)=\{0,1\}^n$; $E(Q_N)=\{(u,v)\mid u,v\in V(Q_N), d_H(u,v)=1\}$. ここで $d_H(u,v)$ は u,v 間のハミング距離である．i 番目のビットだけが異なる2点を結ぶ辺を i 次元の辺という $(1\leq i\leq n)$. Q_N は n-正則な2部グラフであり，$X_Q=\{x\mid x\in V(Q_N), d_H(x,\mathbf{o})$ が偶数$\}$, $Y_Q=\{y\mid y\in V(Q_N), d_H(y,\mathbf{o})$ が奇数$\}$ と定義すると，(X_Q,Y_Q) は Q_N の2分割である．すべての i 次元の辺の集合は Q_N の完全マッチングであるので，i 次元の辺を i 次辺とみなすことにする．

5 下界

Q_N の実現に対する光分岐数と配列平面の面積の下界に関する以下の定理を証明できる．

定理 1 Q_N の任意の実現 $\langle\phi,\psi,\boldsymbol{C}\rangle$ に対して，$|\boldsymbol{C}|\geq 2\log N-1$ である． □

定理 2 Q_N の任意の実現 $\langle\phi,\psi,\boldsymbol{C}\rangle$ に対して，$A\langle\phi,\psi,\boldsymbol{C}\rangle\geq N(\log N+1)/2$ である． □

6 実現

以下に小文で提案する Q_N の実現を示す．

まず，任意の $w,h\in\boldsymbol{N}$ に対して，写像 $\tau_{w\times h}:V(Q_N)\to\boldsymbol{N}^2$ を以下のように定義する:
$v=v_nv_{n-1}\cdots v_1\in V(Q_N)$ に対して，

$$\tau_{w\times h}(v)=\begin{cases}(w\sum_{i=1}^{(n-1)/2}2^{i-1}v_{2i-1}, h\sum_{i=1}^{(n-1)/2}2^{i-1}v_{2i}) & \text{if } n:\text{odd}\\ (w\sum_{i=1}^{n/2}2^{i-1}v_{2i-1}, h\sum_{i=1}^{(n-2)/2}2^{i-1}v_{2i}) & \text{if } n:\text{even.}\end{cases}$$

次に，$\tau_{w\times h}$ を用いて，写像 $\phi_{w\times h}:\tilde{X}_Q\to\boldsymbol{N}^2$ と $\psi_{w\times h}:\tilde{Y}_Q\to\boldsymbol{N}^2$ を以下のように定義する:

$$\phi_{w\times h}(x^s)=\tau_{w\times h}(x)+(w',h')$$

$$\phi_{w\times h}(x^i)=\begin{cases}\tau_{w\times h}(x)+(1,1) & \text{if } i=n\\ \tau_{w\times h}(x)+(1-x_i)(2w'-1,2h'-1) & \\ \quad +(2x_i-1)(i \bmod (2w'-1), \lfloor i/(2w'-1)\rfloor) & \text{if } i<n\end{cases}$$

$$\psi_{w\times h}(y^s)=\tau_{w\times h}(y)+(w',h')$$

$$\psi_{w\times h}(y^i)=\begin{cases}\tau_{w\times h}(y)+(1,1) & \text{if } i=n\\ \tau_{w\times h}(y)+(1-y_i)(2w'-1,2h'-1) & \\ \quad +(2y_i-1)(i \bmod (2w'-1), \lfloor i/(2w'-1)\rfloor) & \text{if } i<n.\end{cases}$$

ただし，$w'=\lceil w/2\rceil, h'=\lceil h/2\rceil$ である．

最後に，光分岐を表現するベクトルの集合 $\boldsymbol{C}_{w\times h}=\{\boldsymbol{c}_0,\boldsymbol{c}_1,\cdots,\boldsymbol{c}_{2n-1}\}$ を以下のように定義する:

$$\boldsymbol{c}_i=\begin{cases}(1,1)-(w',h') & \text{if } i=0\\ (2^{(i-1)/2}w,0)-(w',h')+(i \bmod (2w'-1), \lfloor i/(2w'-1)\rfloor) & \text{if } 1\leq i\leq n-1 \text{ and } i:\text{odd}\\ (0,2^{(i-2)/2}h)-(w',h')+(i \bmod (2w'-1), \lfloor i/(2w'-1)\rfloor) & \text{if } 1\leq i\leq n-1 \text{ and } i:\text{even}\\ -\boldsymbol{c}_{i-n} & \text{if } n\leq i\leq 2n-1.\end{cases}$$

定理 3 $(w-1)(h-1)\geq 2\log N+1$ ならば，$\langle\phi_{w\times h},\psi_{w\times h},\boldsymbol{C}_{w\times h}\rangle$ は Q_N の実現である． □

定理 4 $wh=2logN+1$ ならば，$A\langle\phi_{w\times h},\psi_{w\times h},\boldsymbol{C}_{w\times h}\rangle=N\log N+N/2$ である． □

$|\boldsymbol{C}_{w\times h}|=2\log N$ であり，下界より1だけ大きい．また，定理2と4から，上の実現の配列平面の面積は下界の高々2倍であることに注意されたい．

謝辞： 日頃御指導頂く東工大の梶谷洋司教授に感謝する．また，ホログラムについて御教示頂いた東京工芸大の中楯末三助教授に感謝する．本研究は，東工大の CAD21 研究体の研究課題の一部として行なわれたものである．

参考文献

[1] A. Louri and H. Sung. Efficient implementation methodology for three-dimensional space-invariant hypercube-based optical interconnection networks. *Applied Optics*, Vol. 32, No. 35, pp. 7200–7209, December 1993.

[2] A. Louri and H. Sung. 3D Optical Interconnects for High-Speed Interchip and Interboard Communications. *Computer*, Vol. 27, No. 10, pp. 27–37, October 1994.