WSI ネットワークの動的耐故障性について*

3B－5

山田 敏規　西村 知洋　上野 修一†
東京工業大学 電気・電子工学科‡

1 はじめに

ネットワーク Hを含むネットワーク Gは，任意の t 個のプロセッサが故障しても残りの正常な部分ネットワークから Hを再構成できるとき，Hの t-再構成可能ネットワークであるという．Hの t-再構成可能ネットワーク Gは，Hの再構成に際して置換するプロセッサの総数[元プロセッサと置換プロセッサの間の距離の総和] が Hの点数に独立であるとき，t-有限[t-局所] 再構成可能であるという．これらの概念は，WSI の動作時の故障に対して実時間で WSI ネットワークを再構成する問題に関連して文献[1, 2] で提案されている．N個のプロセッサから成る2次元アレイ A_Nに対して，$O(N)$ 個の冗長なプロセッサを付加して t-局所再構成可能ネットワークを構成できることが知られている[2].

小文では，N個のプロセッサから成る任意のネットワークに対して，最小数 t の冗長なプロセッサを付加して t-有限再構成可能ネットワークを構成できることを示すと共に，t-局所再構成可能ネットワークを構成するためには少なくとも$\Omega(N)$ 個の冗長なプロセッサを付加する必要があることを示す．これは，上で述べた文献[2] の A_Nに対する t-局所再構成可能ネットワークの冗長プロセッサ数は（オーダの意味で）最適であることを示している．

2 定義

グラフ Gの点集合と辺集合をそれぞれ $V(G)$と $E(G)$ で表す．$F \subseteq V(G)$ に対して，G から Fのすべての点を除去して得られるグラフを $G-F$で表す．グラフ Gの各点とグラフ Hの各点を辺で結んで得られるグラフを $G \vee H$で表す．

格子グラフ R_2は次のように定義される（無限）グラフである:$V(R_2) = Z^2$;$E(R_2) = \{(u,v)|\ u_1 = v_1, |u_2 - v_2| = 1$ または $|u_1 - v_1| = 1, u_2 = v_2\}$. ここで，$u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2)$ である．K_tは t 点上の完全グラフである．

Gにおいて，2点 $u, v \in V(G)$ を結ぶパスの辺数の最小値を u, v間の距離といい，$d_G(u,v)$ で表す．特に，格子グラフ上の2点 u, v間の距離をマンハッタン距離といい，$d_1(u,v)$ で表す．

グラフ Gと Hに対して，一対一写像$\phi : V(H) \to V(G)$ を Hの Gへの埋め込みという．特に，Gが格子グラフであるとき，ϕを Hのレイアウトという．$\max\{d_G(\phi(u), \phi(v))|\ (u,v) \in E(H)\}$ をϕの遅延という．遅延が kである埋め込みを k-埋め込みという．ϕが 1-埋め込みであるための必要十分条件は，ϕが次の条件を満たすことである：$(u,v) \in E(H)$ であるならば，$(\phi(u), \phi(v)) \in E(G)$ である．すなわち，Hから Gへの 1-埋め込みが存在するための必要十分条件は，Hが G の部分グラフであることである．

グラフ Gは，次の条件を満たすとき，グラフ Hに対して t-再構成可能であるという：$|F| = t$ である任意の $F \subseteq V(G)$ に対して，$G-F$は Hを部分グラフとして含む．

G はグラフ Hに対して t-再構成可能なグラフとし，要素数 t の任意の点集合を $F \subseteq V(G)$ とする．また，ϕを G の任意のレイアウトとする．$\mu_0 : V(H) \to V(G)$ と$\mu_F : V(H) \to V(G-F)$ を Hの G と $G-F$への任意の 1-埋め込みとする．G の定義からμ_0とμ_Fは常に存在する．写像 $\pi : \mu_0(v) \mapsto \mu_F(v)$ を Hの再構成という．πのコストは $|\{v \in V(H)|\ \mu_F(v) \neq \mu_0(v)\}|$ あるいは $\sum_{v \in V(H)} d_1(\phi(\mu_F(v)), \phi(\mu_0(v)))$ で評価される．

$$\Delta^G(\mu_0, F, H) = \min_{\mu_F} |\{v \in V(H)|\ \mu_F(v) \neq \mu_0(v)\}|,$$

$$\Delta^\phi(\mu_0, F, H) = \min_{\mu_F} \sum_{v \in V(H)} d_1(\phi(\mu_F(v)), \phi(\mu_0(v)))$$

とし,

$$DR^G(t, H) = \min_{\mu_0} \max_{|F|=t} \Delta^G(\mu_0, F, H),$$

---

*On Dynamic Fault Tolerance for WSI Networks

†Toshinori Yamada, Tomohiro Nishimura, and Shuichi Ueno

‡Department of Electrical and Electronic Engineering, Tokyo Institute of Technology

$$DR^{\phi}(t,H) = \min_{\mu_0} \max_{|F|=t} \Delta^{\phi}(\mu_0, F, H)$$

と定義する．定義から，任意のϕに対して$DR^G(t,H) \leq DR^{\phi}(t,H)$である．$DR^G(t,H)$が$H$の点数とは独立であるとき，$G$は$H$に対して$t$-有限再構成可能であるという．また，ある$\phi$に対して$DR^{\phi}(t,H)$が$H$の点数とは独立であるとき，$G$は$H$に対して$t$-局所再構成可能であるという．

3 有限再構成可能性

任意のグラフHに対して，$H \vee K_t$がt-再構成可能であることはよく知られている．実際，$H \vee K_t$はHに対してt-有限再構成可能であることが簡単に分かる．

定理 1 N点から成る任意のグラフ Hに対して，$H \vee K_t$はt-有限再構成可能なグラフである．

証明： $V(H) = \{1, 2, \ldots, N\}$，$V(K_t) = \{N+1, N+2, \ldots, N+t\}$とする．1-埋め込み$\mu_0 : V(H) \to V(H \vee K_t)$を$\mu_0(i) = i$とする．$|F| = t$であるような任意の$F \subset V(H \vee K_t)$について考える．一般性を失うことなく，$|V(H) \cap F| = |V(K_t) - F| = s \leq t$とし，$V(H) \cap F = \{f_1, f_2, \ldots, f_s\}$，$V(K_t) - F = \{h_1, h_2, \ldots, h_s\}$とする．このとき，$\mu_F : V(H) \to V(H \vee K_t - F)$を

$$\mu_F(i) = \begin{cases} i & \text{if } i \neq f_j \text{ for all } j = 1, 2, \ldots, s \\ h_j & \text{if } i = f_j \end{cases}$$

と定義する．μ_Fが1-埋め込みであることは簡単に確かめられる．このとき，$|\{v \in V(H) | \mu_F(v) \neq \mu_0(v)\}| = s \leq t$であるので，$DR^{H \vee K_t}(t,H) \leq t$である．よって，$H \vee K_t$は$H$に対して$t$-有限再構成可能である． ∎

4 局所再構成可能性

定理 2 N点から成るグラフHに対して，Gがt-局所再構成可能であるならば，$|V(G)| = N + \Omega(N)$である．

証明： $|V(G)| = N + r$とし，lを$(-1+\sqrt{1+(2N/r)})/2 - 1 \leq l < (-1+\sqrt{1+(2N/r)})/2$を満たす整数とする．また，$\phi$を$G$の任意のレイアウトとする．このとき，任意の$y \in V(G)$に対して，$d_1(\phi(x), \phi(y)) \leq l$であるような$x \in V(G)$の数は高々$2l^2+2l+1$である．よって，任意の1-埋め込み$\mu_0 : V(H) \to V(G)$に対して，$d_1(\phi(x), \phi(y)) \leq l$である$y \in V(G) - \mu_0(V(H))$が存在するような$x \in V(G)$の数は高々$r(2l^2+2l+1) < n + r$であるので，任意の$y \in V(G) - \mu_0(V(H))$に対して，$d_1(\phi(z), \phi(y)) \geq l+1$であるような点$z \in \mu_0(V(H))$が存在する．したがって，$z \in F$かつ$|F| = t$である任意の点集合$F \subseteq V(G)$と任意の1-埋め込み$\mu_F : V(H) \to V(G-F)$に対して，$w = \mu_F(v_1), \mu_0(v_1) = \mu_F(v_2), \mu_0(v_2) = \mu_F(v_3), \ldots, \mu_0(v_k) = z$であるような$w \in V(G) - \mu_0(V(H))$が存在する．よって，

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V(H)} d_1(\phi(\mu_F(v)), \phi(\mu_0(v))) & \\ \geq & \sum_{i=1}^{k} d_1(\phi(\mu_F(v_i)), \phi(\mu_0(v_i))) \\ \geq & \ d_1(\phi(w), \phi(z)) \\ \geq & \ l+1 \\ \geq & \ \frac{-1+\sqrt{1+(2N/r)}}{2} \end{aligned}$$

であるので，

$$DR^{\phi}(t,H) \geq \frac{-1+\sqrt{1+(2N/r)}}{2}$$

である．もし$r = o(N)$であるならば，$DR^{\phi}(t,H) = \omega(1)$となり，$G$が$H$に対して$t$-局所再構成可能であることに矛盾する．ゆえに，$r = \Omega(N)$である． ∎

謝辞： 日頃御指導頂く梶谷洋司教授に感謝する．本研究は，東工大のCAD21研究体の研究課題の一部として行なわれたものである．

参考文献

[1] E. H.-M. Sha and K. Steiglitz. Explicit constructions for reliable reconfigurable array architectures. *Proc. 3rd IEEE Symposium on Parallel and Distributed Processing*, pp. 640–647, 1991.

[2] E. H.-M. Sha and K. Steiglitz. Reconfigurability and reliability of systolic/wavefront arrays. *IEEE Trans. on Comput.*, Vol. 42, No. 7, pp. 854–862, July 1993.