マルコフ連鎖プログラムに対するページ置換アルゴリズムの研究

1B－2　能登谷淳一　筑波大学工学研究科
大保信夫　筑波大学電子・情報工学系
陳漢雄　つくば国際大学

1　はじめに

ネットワーク環境の拡大やマルチメディアに代表される膨大データを用いる応用分野の増大に伴い、ページ置換アルゴリズムの再評価が求められている。

ページ置換アルゴリズムとその振舞いについては、仮想記憶の概念の導入初期に活発な議論が行われたが、その後 TSS の普及に伴い、研究の主眼はワーキングセット法などに移行し、個々のページ置換アルゴリズムに関する議論は注目されなかった。

一方、近年になり個人使用のための計算機でも多量のデータを管理する必要が増大している。この様な環境下では、TSS で想定された使用法とは異なり、同時に動作するプログラムの内、二次記憶などの資源を占有的に使用する応用プログラムは少数であり、他のプログラムは、補助的な役割を担っている場合が多い。従って、ワーキングセット法などによる性能向上はあまり期待できない。むしろ、主要な応用プログラムに対して、二次記憶への参照の起こり方の特徴を調べ、それに適したページ置換アルゴリズムを採用するのが望ましい。

マルコフ連鎖、特に一次元酔歩は比較的単純なモデルでありながらも、WWW などのネットワークアプリケーションや、道路地図データベースシステムなどの高度応用分野における外部記憶への参照のパターンをよく近似したモデルであるといえる。

本研究では、マルコフ連鎖に従うプログラムにおける最適ページ置換アルゴリズムのコストについて議論する。

2　ページ置換アルゴリズム

ページ置換アルゴリズムは6項組 $\mathcal{A}=(N,\mathfrak{M},Q,S_0,q_0,g)$ からなる系である。N はページ集合である。
$\mathfrak{M}=\{S|S\subset N,|S|\le m\}$ は全てのメモリ状態からなる集合であり、初期状態 S_0 を含む。m はメモリフレームの個数である。Q はアルゴリズムの全ての制御状態からなる集合であり、初期状態 q_0 を含む。$g:\mathfrak{M}\times Q\times N\to\mathfrak{M}\times Q$ は $\mathcal{A}$ の遷移関数である。

ページ参照列は $\omega\in N^*=\bigcup_{t=0}^{\infty}N^t$ によって表される列である。N^t は、N の元を要素とする、長さ t の列全体からなる集合である。但し、N^0 の単元 ϵ は空列を表す。$\omega(t)\in N$ で ω の t 番目の要素を指す。即ち、$\omega\in N^t$ のとき、$\omega=(\omega(1),\ldots,\omega(t))$ である。$\omega_1\omega_2$ は列 ω_1 と ω_2 の連結であり、$\sigma_{t_1}^{t_2}\omega$ は ω の t_1 番目から t_2 番目までの要素からなる部分列である。

$\mathcal{A}$ と、列 $\omega\in N^*$ に対し、$(S_\omega^{\mathcal{A}},q_\omega^{\mathcal{A}})\in\mathfrak{M}\times Q$ を求める事を $\mathcal{A}$ で ω を処理するという。但し、$(S_\epsilon^{\mathcal{A}},q_\epsilon^{\mathcal{A}})=(S_0,q_0)$, $(S_{\omega x}^{\mathcal{A}},q_{\omega x}^{\mathcal{A}})=g(S_\omega^{\mathcal{A}},q_\omega^{\mathcal{A}},x)$ とする。

$$S_{\omega x}^{\mathcal{A}}=\begin{cases}S_\omega^{\mathcal{A}} & \text{if } x\in S_\omega^{\mathcal{A}}\\ S_\omega^{\mathcal{A}}\cup\{x\} & \text{if } |S_\omega^{\mathcal{A}}|<m, x\notin S_\omega^{\mathcal{A}}\\ S_\omega^{\mathcal{A}}\cup\{x\}\setminus\{y\} & \text{otherwise.}(y\in S_\omega^{\mathcal{A}})\end{cases}$$

となるようなページ置換 $\mathcal{A}$ を必要時ページ置換と呼ぶ。y を $\mathcal{A}$ で ωx を処理する際の $\mathcal{A}$ の victim と呼ぶ。

本稿では、必要時ページ置換に限定して議論を行う。なぜならば、任意の $\mathcal{A}$ に対して、$C(\mathcal{A}',\omega)\le C(\mathcal{A},\omega)$ なる必要時ページ置換 $\mathcal{A}'$ が存在するからである。[1]

3　プログラムとページ置換のコスト

プログラムは確率過程 $\mathcal{P}=(N,\varphi)$ で表される。N はページの集合であり、$\varphi: N^\infty\to[0,1]$ は確率関数である。例えば、$\varphi(\omega)=p_{\omega(t)}\prod_{t=1}^{\infty}p_{\omega(t)\omega(t+1)}$ は、推移確率行列 $\mathbf{P}=[p_{ij}]$ および初期状態確率 $\mathbf{p}=(p_1,\ldots,p_n)$ を持つマルコフ連鎖をなすプログラムを表す。

ページ置換 $\mathcal{A}$ の推移関数 g がプログラム $\mathcal{P}$ の記述中に現れる変数のみによって記述されているとき、$\mathcal{A}$ によって $\mathcal{P}$ を処理可能であるという。

プログラムが与えられたときのコストを定義する。

$$C(\mathcal{A},\mathcal{P})=\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{\omega\in N^\infty}\varphi(\omega)\sum_{t=1}^{T}F(\omega(t),S_{\sigma_1^{t-1}\omega}^{\mathcal{A}})$$

但し、$F(x,S)=\begin{cases}0, & \text{if } x\in S\\ 1, & \text{if } x\notin S\end{cases}$ とする。

4　最適ページ置換

プログラム $\mathcal{P}$ と $\mathcal{P}$ を処理できる任意の $\mathcal{A}$ に対して、$C(\mathcal{A}_0,\mathcal{P})\le C(\mathcal{A},\mathcal{P})$ になるとき、$\mathcal{A}_0$ を $\mathcal{P}$ の最適ページ置換と呼ぶ。

最適ページ置換に関する以下の “Informal principle of optimality”[1] はよく知られている。

> メモリ中のページのうち、次の参照までの期間が最も長いと期待されるページを victim とするような必要時ページ置換は最適ページ置換である。

Analysis of Page Replacement Algorithms on Markov Chain Programs
Junichi Notoya, Doctral Degree Program in Engineering, University of Tsukuba
Nobuo Ohbo, Institute of Information Sciences and Electronics, University of Tsukuba
Chen Hanxiong, Tsukuba Internationl University

$\mathcal{P}$ がマルコフ連鎖 $\mathbf{P} = [p_{ij}]$ で与えられているとき、S_t 中で最大の平均最小到達時刻をもつもの、即ち、$\mu(\omega(t), x) = 1 + \sum_{i \neq x} p_{\omega(t)i}\mu(i, x)$ を最大にする $x \in S_t$ を victim に選ぶページ置換を $\mathcal{A}_0(\mathcal{P})$ とする。

"Informal principle of optimity" が $\mathcal{P}$ に適用可能とすると、$\mathcal{A}_0(\mathcal{P})$ は、$\mathcal{P}$ に対する最適ページ置換であると考えられる。

5 一次元酔歩への適用

$N = \{1, \ldots, n\}$ とし、N 上のマルコフ連鎖 $\mathbf{P} = [p_{ij}]$

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = 1, j = 2 \text{ or } i = n, j = n - 1 \\ 1 - p & \text{if } i - j = -1 \\ p & \text{if } i - j = 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

を考える。$\mathbf{P}$ は N 上の一次元酔歩である。

$\mathbf{P}$ に従うプログラムを $\mathcal{P}$ とし、$\mathcal{P}$ により生成される列 $\omega \in N^{\infty}$ を $\mathcal{A}_0(\mathcal{P})$ で処理することを考える。$\mathbf{P}$ 上での、平均最小到達時刻 $\mu(i, j)$ は存在し、

$$\mu(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{if } i = j \\ \dfrac{2p^2}{(2p-1)^2}\alpha + \beta & \text{if } i < j \\ \dfrac{2p(1-p)}{(2p-1)^2\left(\frac{1-p}{p}\right)^n}\alpha + \beta & \text{if } i > j \end{cases}$$

で与えられる。但し、$\alpha = \left(\frac{1-p}{p}\right)^j - \left(\frac{1-p}{p}\right)^i$, $\beta = \frac{j-i}{2p-1}$ である。

$S_0 \subset \bigcup_t \{\omega(t)\}$ なる ω, S_0 に対し、

$$t_0 = \min\{\tau | S_0 \subset \bigcup_{t=1}^{\tau} \{\omega(t)\} \wedge \left| \bigcup_{t=1}^{\tau} \{\omega(t)\} \right| \geq m\}$$

により t_0 を定義する。

定理 1. 任意の $t \geq t_0$ に対して、ある $k(t)$ が存在して、

$$S^{\mathcal{A}_0(\mathcal{P})}_{\sigma_1^t \omega} = \bigcup_{i=0}^{m-1} \{\omega(t) - k(t) + i\}$$

定理1の結果を利用して、$\mathcal{A}_0(\mathcal{P})$ で $\mathcal{P}$ を処理する際のコストを求める。

$k(t)$ は推移行列 $\mathbf{Q} = [q_{ij}]$ を持つマルコフ連鎖をなし、

$$q_{ij} = \begin{cases} (1 - x_1)(1 - p) & \text{if } i = 1, j = 1 \\ p + x_1 + px_1 & \text{if } i = 1, j = 2 \\ (1 - x_n)p & \text{if } i = m, j = m \\ 1 - p + px_n & \text{if } i = m, j = m - 1 \\ 1 - p & \text{if } i - j = -1, 2 \leq i \leq m - 1 \\ p & \text{if } i - j = 1, 2 \leq i \leq m - 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

但し、$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ は $\mathbf{P}$ の定常分布である。$\mathbf{Q}$ の定常分布 $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ を考えると、$\mathcal{P}$ を $\mathcal{A}_0(\mathcal{P})$ で処理する際のコストは、以下のように与えられる。

$$C(\mathcal{A}_0(\mathcal{P}), \mathcal{P}) = y_1(1 - x_1)(1 - p) + y_m(1 - x_n)p$$

但し、

$$x_1 = \frac{2p - 1}{2\left((1-p)\left(\frac{p}{1-p}\right)^n - p\right)} \left(\frac{p}{1-p}\right)$$

$$x_n = \frac{(1-p)(2p-1)}{2p\left((1-p)\left(\frac{p}{1-p}\right)^n - p\right)} \left(\frac{p}{1-p}\right)^n$$

$$y_1 = \frac{p(2p-1)(1-p+px_n)}{p(1-p+px_n)(p-x_1-px_1-1) + \left(\frac{p}{1-p}\right)^m (1+x_n)(1-p)^2(p+x_1+px_1)}$$

$$y_m = \frac{(1-p)^2\left(\frac{p}{1-p}\right)^m (2p-1)(p+x_1+px_1)}{p^2(1-p+px_n)(p-x_1-px_1-1) + p\left(\frac{p}{1-p}\right)^m (1+x_n)(1-p)^2(p+x_1+px_1)}$$

6 おわりに

本稿では、二次記憶への参照列としてマルコフ連鎖に従った列を発生するプログラムに対する、ページ置換アルゴリズムの振舞いについて議論し、コストの評価を行った。本研究で議論の対象とした一次元酔歩に対する最適ページ置換アルゴリズムはそのままの形では実際の応用に供する事は困難であるが、本研究の結果は、新たなページ置換アルゴリズムの設計、開発にあたり、その性能評価の基準として有用である。今後、より広いクラスのプログラムについて同様の議論を行い、更に "Informal principle of optimality" の適用範囲について検証を重ねる予定である。

参考文献

[1] A. V. Aho, P. J. Denning, and J. D. Ullman. Principles of optimal page replacement. *Journal of the ACM*, 18(1):80–93, Jan. 1971.