

有限要素法と境界要素法を利用した電磁界解析の並列処理

4L-8

坂本 哲也, 前川 仁孝, 若尾 真治, 小貫 天, 笠原 博徳

早稲田大学理工学部電気工学科

1 はじめに

有限要素法や境界要素法は、近似のバランスが良く、また応用範囲も広いので、以前からさまざまな分野の数値解析に使用されている。特に有限要素法は、不均一な領域や、非線形性を持つような領域の解析にも有効であるが、スパースバンドマトリクスの求解に多くの時間を要するため、さまざまな並列化に関する研究が行なわれている [1, 2]。これに対し境界要素法は、無限の大きさを持った解析対象領域を比較的自然的に扱え、また得られる結果が滑らかになるため、流れのある場の解析などに利用されている [3, 4]。

最近ではこのような有限要素法および境界要素法の両方の長所を利用することにより、リニア・モーターカーの磁場解析などの電磁界解析が効率的に行なえるようになってきたが、扱うべき問題の規模が巨大化しているため有限要素・境界要素併用法の並列処理による解析速度の高速化が望まれている。

本稿では、有限要素法における粗粒度並列性を引き出す手法である並列サブストラクチャ法を適用した有限要素法部分の分割を境界要素法部分にも利用し、境界要素法部分においても粗粒度並列性を引き出す方法を提案し、Cenju-3 上で評価する。

2 併用法を利用した電磁界解析アプリケーションの並列化手法

本節では、有限要素法と境界要素法を併用した電磁界解析アプリケーションにおける行列の特徴と、その並列化手法について述べる。

電磁界解析アプリケーションでは、その特徴から、いくつかの点に注意する必要がある。まず、電磁界はほとんどの物質を通り抜けてしまうため、電磁界解析ではかなり広い領域を解析対象にしなければならないが、このような解析には境界要素法の方が向いている。さらに、磁性体領域などの非線形性の問題となる部分では、有限要素法が有効となる。そこで電磁界解析においては効率良い計算をするために、磁性体領域などの非線形領域には有限要素法を、空気領域では境界要素法を利用することのできる有限要素法と境界要素法の併用法 (以下では併用法) が提案されている [3, 4]。

しかしながら、有限要素法によって作られる行列はスパースバンドマトリクス、境界要素法によって作られる行列は密行列になるため、併用法によって作られる行列はその部分によって異なった性質を持つ。そのため、並列効果を上げるためには行列の部分によって並列化手法を変えることが必要となる。以下では、併用法の行列の特徴、有限要素部分および境界要素法部分に対する並列サブストラクチャ法の適用、残りの密行列部分の並列化手法について述べる。

2.1 併用法での行列の特徴

この節では、併用法での行列の特徴について述べる。まず、有限要素法による行列はスパースバンドマトリクス、境界要素法による行列は密行列になる。図 1 に示した K, G がそれら

に相当する。しかしながら併用法では、有限要素法領域を境界要素法領域が囲む形になるため、有限要素法節点と境界要素法節点との関連項が存在する。その結果、併用法による行列には図 1 の L, H のような関連項による部分行列が含まれる。このうち L は、境界要素法と有限要素法の両方にかかわる節点の部分に値が入り、 H は境界要素法に面している有限要素上の節点に値が入る。このため、 L はほぼランダムなスパース行列になり、 H は縦のストライプ状に要素を持つ行列になる。

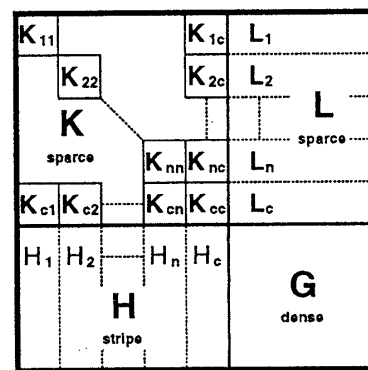


図 1: サブストラクチャ法を適用した併用法の行列

2.2 有限要素部分および境界要素法部分に対する並列サブストラクチャ法の適用

並列サブストラクチャ法は、被解析領域をサブドメインといういくつかの領域に分割する手法で、その分割の仕方によって比較的自由に粒度をコントロールでき、またサブドメインの境界部分の計算を除き通信が少なく済むために、従来より多くの研究が行なわれてきた [1, 5]。有限要素法の行列をこの手法を利用することにより、図 1 の部分行列 K のように縁付ブロック対角行列にすることができる。

このような行列をクラウト法を用いて解くことを考えると、部分行列 K_{ii} ($i = 1, 2, \dots, n$) は並列に LU 分解でき、さらにそれらが終了すれば部分行列 K_{ci} , K_{ic} ($i = 1, 2, \dots, n$) も同様に並列に LU 分解できる。また、部分行列 K_{cc} はこれらの LU 分解の計算が全て終わったあとに LU 分解できる。

次に前進代入部においては、部分行列 K_{ii} , K_{ci} , K_{ic} をそれぞれひとまとまりのブロックにして考えれば、他のブロックのデータを必要としないので、部分行列 K_{cc} 以外は並列に計算できる。残りの部分行列 K_{cc} は、他のブロックから必要なデータが送られてくるまで計算ができないため、最後に計算する。

最後に後退代入部においては、前進代入部とは逆に部分行列 K_{cc} の計算が終らないと他の部分の計算ができない。そこで、部分行列 K_{cc} を先に計算し、このデータを全ての PE に送った後、前進代入部と同様にして残りの部分を並列に計算する。

今回提案する手法ではこのブロック対角行列の LU 分解法を拡張し、有限要素法部分以外の一部もこの分割を利用する。まず、この時の行列は図 1 の様になっている。そして、有限要素法部分以外の行列を上記の手法の縁の部分と考える。す

Parallelization of the Electro-magnetic Field Analysis Application Using Hybrid Finite Element and Boundary Element Method

Tetsuya SAKAMOTO, Yoshitaka MAEKAWA, Shinji WAKAO, Takashi ONUKI, Hironori KASAHARA

Department of Electrical Engineering, Waseda University

なわち、行列 L, H の部分を L_1, L_2, \dots というように部分行列に分割し、有限要素法部分の縁の部分行列とまとめて考える(例えば K_{1c} と L_1, K_{c1} と H_1)。そうすれば、部分行列 $L_i, H_i (i = 1, 2, \dots, n)$ が並列に計算でき、また行列 H の部分は比較的密であるため、ここで粗粒度並列性が期待できる。以上の計算手順をタスクグラフに表すと図2のようになる。

このタスクグラフから、各 PE に LU_i, FS_i, BS_i のマクロタスクを一組にして割り当てるようにタスクをスケジューリングする。そのため、各の PE に図1の部分行列 $K_{ii}, K_{i1}, K_{1i}, L_i, H_i$ のデータを一組にして割り振れば効率良く計算ができる。そこで、今回開発した並列化 C 言語プログラムでは、与えられたデータからデータを各 PE ごとに自動配置してサブストラクチャ部分を計算し、密行列部分の計算に入る前に必要となるデータ転送を行なうようにコード生成をする。

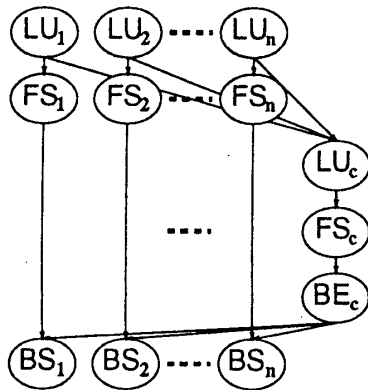


図2: マクロタスクグラフ

2.3 密行列部分の並列化

本節では、前節の残りの部分、すなわち行列 L と行列 H の一部と行列 G の部分の並列化について述べる。

これらの部分の並列化は行列の構造が違うので前節の手法では粗粒度並列化ができない。しかし、この部分は密行列を含み計算量も多いため、別の方法で並列性を出す必要がある。そこで提案する手法では、これらの部分はクラウト法において、まず対角要素を計算したあとにその値を使ってその行と列の残りの計算を行ない、余計なデータ転送を省くために各 PE で対角要素を同時に計算したあと、残りの部分のループを各 PE に分配して計算するという通常のループ並列化手法を用いて並列化する。

この部分の計算においては、明らかにイタレーション間でのデータ転送が起こる。そこで、開発した並列化 C 言語プログラムでは余計な転送を削除するために、密行列部分の計算に必要な K_{ic}, K_{ci}, L_i, H_i を前節で述べた前進代入後のデータ転送の段階で必要な PE だけに転送するようなコード生成を行なうようにする。これにより、イタレーションごとに転送しなくてはならないデータ転送量を最小にすることができる。

本来、単なるループ並列化だけではイタレーション間のデータ転送がネックになってしまうが、本手法では余計な転送の削除とデータ配置の工夫によってそのコストを最小に押えることができる。

3 併用法の並列化手法の性能評価

本節では、有限要素法と境界要素法を利用した電磁界解析アプリケーションを提案する手法によって並列化し、性能を Cenju-3 上で評価した結果について述べる。

Cenju-3 は、各 PE に CPU VR4400(Cache 32Kbytes + 1Mbytes), 32Mbytes または 64Mbytes のローカルメモリを持ち、最大 PE 数は 256 台までの分散メモリ型並列計算機で

ある。今回の評価はメインメモリ 32Mbytes, PE 台数 8 台のものを利用し、並列化ライブラリとして mini-MPI ライブラリと PARALIB/CJ ライブラリを用いて C 言語で行なった。

評価に用いたデータとして、電磁界の遮蔽問題(有限要素法の節点数 $9 \times 9 \times 4$, 行列サイズ 676×676 , 非零要素 41.5%)を例に評価した。なお、サブストラクチャの分割数についてはこの問題の有限要素法の節点数を考慮し、分割なし、2 分割、4 分割の 3 通りで行ない、また PE 台数については粗粒度並列性がサブストラクチャの分割数までであることから 1 台から 4 台までとした。

評価の結果、サブストラクチャ法による分割なしで PE 台数が 1 の時に 103.219 秒かかっていたものが、分割数が 2 で 2 台の PE を用いることによって 42.179 秒、分割数が 4 で 4 台の PE を用いることによって 21.708 秒にまで実行時間が短縮された。

本結果により、まずサブストラクチャ法なしの時は、PE 台数が増えるにつれ平均的に速度向上しているが、密部分の通信の影響が出るために、PE 台数がある程度以上増えると並列効果が出なくなる。一方、サブストラクチャ法により 2 分割したものについては、PE 台数が 2 台までは効果が出るが、それ以降は効果が上がらず、PE 台数を増やすとサブストラクチャの分割のオーバーヘッドにより、分割なしの時のの方が速くなってしまふ。またサブストラクチャ法で 4 分割したものについては、サブストラクチャの分割数である 4 台までリニアに並列効果が出ており、この 3 つの例のうちで最も速くなっていることがわかる。

サブストラクチャの分割数は粗粒度並列性にかかわるので、並列サブストラクチャ法によって分割された有限要素法部分と境界要素法部分の並列性は分割数までとなる。これに対し、残りのループ並列化部分は通信のコストはあるものの、大きな並列性がある。このことから、比較的並列効果の上がるのはサブストラクチャの分割数までと予想されるが、評価結果はほぼこのとおりになっている。

この結果から、有限要素法部分と境界要素法部分をその問題のサイズに適した大きさのサブストラクチャに分割すれば、その分割数までの PE 台数において大きな粗粒度並列性が期待でき、本稿で提案した手法が有効であることが確認された。

4 まとめ

本稿では、有限要素法と境界要素法を併用した電磁界解析アプリケーションにおいて、並列サブストラクチャ法を応用した手法によって有限要素法部分と境界要素法部分の粗粒度並列性を引き出す手法を提案した。また、提案した手法を Cenju-3 上にインプリメントし、実際の電磁界解析アプリケーションを用いてその有効性を評価した。その結果、従来の単なる密行列の並列化の場合と比較してより高い並列効果の得られることが確認できた。

今後は、より大規模な問題においてサブストラクチャ法の分割数を増やし、提案する並列化手法の性能を評価していく予定である。

参考文献

- [1] C.Farhat and E.Wilson: A New Finite Element Concurrent Computer Program Architecture, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1987.
- [2] G.Yagawa, N.Soneda, S.Yoshimura: A Large Scale Finite Element Analysis Using Domain Decomposition Method on Parallel Computer, Computers and Structures, 1991.
- [3] 若尾 真治, 嶋崎 政仁, 小貫 天: 有限要素・境界要素併用 E-H 法による三次元渦電流場解析, 電気学会論文誌 A(112-11), 1992.
- [4] 小貫 天・若尾 真治: スカラポテンシャルを未知数とする有限要素・境界要素併用法による三次元電磁界解析, 電気学会論文誌 A(112-5), 1992.
- [5] 矢川 元基・吉村 忍: 有限要素法, 培風館, 1991.