述語線形論理の自動証明器

1D－9

三浦 泰介　前田 敦司　米津 光浩　山口 文彦　中西 正和
慶應義塾大学理工学部数理科学科

1. はじめに

線形論理 (linear logic) は古典論理の中の一つの体系であるゲンツェンの LK から派生した体系と考えられる。線形論理の大きな特徴の一つは resource-conscious、すなわち数量概念を論理概念の中に含んでいることである。そして、これは古典論理の推論規則の中から weakening と contraction を除いた論理であると言うこともできる [1][2]。

除かれた古典論理の推論規則

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{A, \Gamma \to \Delta} \text{(weakening左)}$$

$$\frac{A, A, \Gamma \to \Delta}{A, \Gamma \to \Delta} \text{(contraction 左)}$$

A は formula, Γ, Δ は formula の有限列

2. 線形論理

$A \otimes B \multimap C$ の意味は『A と B をちょうど１回ずつ用いて C を結論することができる』[3] となる。以下では、$A_1, \cdots, A_m, B_1, \cdots, B_n, A, B, D$ を formula、$\Gamma, \Delta, \Pi, \Lambda, \Sigma$ を formula の有限列、$m, n \geq 0$ とする。

論理記号	読み方
$\otimes$	*times*
$\wp$	*par*
$\&$	*with*
$\oplus$	*plus*
!	*of course*
?	*why not*
$\multimap$	*entails*
$()^\perp$	*nil*

論理定数

1 (証明可能)	$\otimes$の単位元
$\perp$ (証明不可能)	$\wp$ の単位元
$\top$ (恒真)	$\&$ の単位元
0 (恒偽)	$\oplus$の単位元

Prover of Predicate Linear Logic
Taisuke MIURA　Atsushi MAEDA
Mitsuhiro YONEZU　Fumihiko YAMAGUCHI
Masakazu NAKANISHI
Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Keio University, 3-14-1 Hiyoshi, kohoku-ku, yokohama, kanagawa Pref., 223, Japan

2.1 シーケント計算

- ゲンツェンの LK において、シーケントとは

$$A_1, \cdots, A_m \to B_1, \cdots, B_n$$

の形であり、$A_1, \cdots, A_m$ すべてが成り立つ時に、$B_1, \cdots, B_n$ のうちの少なくとも一つが成立することを意味する。

- 線形論理の体系 LL においてシーケントとは

$$A_1, \cdots, A_m \vdash B_1, \cdots, B_n$$

の形であり、その意味は

$$A_1 \otimes \cdots \otimes A_m \multimap B_1 \wp \cdots \wp B_n$$

である。これはまた、

$$(A_1 \otimes \cdots \otimes A_m)^\perp \wp (B_1 \wp \cdots \wp B_n)$$

と同値である。

線形論理 LL の始式

1. $D \vdash D$
2. $\Gamma, 0 \vdash \Delta$
3. $\Gamma \vdash \top, \Sigma$
4. $\perp \vdash$
5. $\vdash 1$

このようなシーケントに対する推論規則の例を以下にあげる [2]。

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, D \qquad D, \Pi \vdash \Lambda}{\Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Lambda} \text{(カット)}$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Pi \vdash \Delta}{\Gamma, B, A, \Pi \vdash \Delta} \text{(exchange 左)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, D}{D^\perp, \Gamma \vdash \Delta} (^\perp \text{ 左})$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{A \& B, \Gamma \vdash \Delta} (\& \text{ 左} 1)$$

$$\frac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \otimes B, \Gamma \vdash \Delta} (\otimes \text{ 左})$$

$$\frac{A,\Gamma\vdash\Delta \qquad B,\Pi\vdash\Lambda}{A\wp B,\Gamma,\Pi\vdash\Delta,\Lambda}\ (\wp\ 左)$$

$$\frac{A,\Gamma\vdash\Delta \qquad B,\Gamma\vdash\Delta}{A\oplus B,\Gamma\vdash\Delta}\ (\oplus\ 左)$$

$$\frac{B,\Gamma\vdash\Delta \qquad \Pi\vdash\Lambda,A}{A\multimap B,\Gamma,\Pi\vdash\Delta,\Lambda}\ (\multimap\ 左)$$

LLの基本定理

$\Gamma\vdash\Delta$ がLLで証明されれば、$\Gamma\vdash\Delta$ に到るcutなしのLLの証明が存在する。

2.2 述語線形論理の自動証明法

2.2.1 導出法による自動証明器

線形論理では、乗法性の結合子が存在するために古典論理における節形式のような標準形を作ることが困難である。そこで、本自動証明器はformulaをスコーレム化してその母式(matrix)に対して、CLL_e[4]を改良した導出法を用いる。改良した点は導出規則においてユニフィケーションを行なう操作を加えたところである。

2.2.2 自動証明器の健全性

命題線形論理の範疇においては、すべての規則は健全である。しかし、formulaに冠頭標準形への変形やスコーレム化などを適用した場合の健全性を考えると、頭部(prefix)に存在記号で束縛されている変数があった場合は、健全性を保って証明を行なうことは不可能である。そこで、本自動証明器ではその場合は証明を行なわないことにする。

2.3 $\nvdash$ が有する性質

$A\vdash B$ は $1\vdash A\multimap B$ と同値である。しかし、$A\nvdash B$ は $1\vdash(A\multimap B)^{\perp}$ と同値ではない。$A\nvdash B$ はformula $A\multimap B$ が証明不可能の範囲にあることを表している。一方、$1\vdash(A\multimap B)^{\perp}$ は $1\vdash A\otimes B^{\perp}$ と同等であり、

$$\frac{\dfrac{\vdash A \qquad \vdash B^{\perp}}{\vdash A\otimes B^{\perp}}}{1\vdash A\otimes B^{\perp}}$$

から、formula $A, B^{\perp}$ ともに証明可能であることがわかり、さらに $A\multimap B$ は充足不能である。従って、$1\vdash(A\multimap B)^{\perp}$ の方が $A\nvdash B$ に比べて、より $A\multimap B$ の範囲を限定した表現をしていることになる。証明不可能と充足可能は図1から対称な関係にあるから、一方が言えればもう一方も表現することができる。

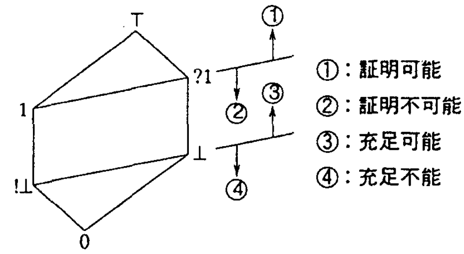

図 1: LLの束

証明不可能: $X\vdash 1$, または $X\vdash ?1$ かつ $1\nvdash X\ \nvdash ?1$

従って、$\nvdash$ を表すためには、またさらに $\nvdash$ を用いなければならないので不可能である。以上のことから、"$A\nvdash B$" と同値な条件を "$X\vdash Y$" の形で書くことはできない。

3. 結論及び今後の展望

本自動証明器は与えたformulaが証明可能のときはTを返すが、証明不可能のときは定まった値を返さない。例えば、書き換え規則の中には節表現中のformulaを増加させるだけの規則があるので、空節が導き出されることはない。

今後の展望としては、規則の適用順序、規則を適用する節表現やformulaの選択などについてもヒューリスティックを導入する必要がある。また、導出規則については導出規則を適用するための相補的なformulaとして、どのような範囲のformulaを扱えばもっとも効率的であるかを検討する余地がある。

参考文献

[1] Jean-Yves Girard : Linear Logic. *Theoretical Computer Science*,(1987) 50: 1-102

[2] 竹内 外史 : 線型論理入門. 日本評論社,(1994).

[3] Patrick Lincoln : Linear Logic(Sigact News Logic Column 2). *ACM SIGACT,1992.*

[4] 南澤 吉昭, 米崎 直樹 : 導出法による線形論理 CLL_eの自動証明戦略. 情報処理学会第50回(平成7年前期)全国大会.