代数的構造の可視化

6H－8

岸本慎介 † 日置尋久 † 品川嘉久 † 國井利泰 ‡
† 東京大学 ‡ 会津大学

1 はじめに

代数的構造を理解しやすいものにするため、視覚的にとらえられるようにする。本研究では、代数的構造の中でももっとも基本的な群についての可視化を行っている。

代数学では、記号による記法が主流を占めている。記号による記法は、正確ではあるものの、とくに代数学に精通していない者にとっては、非常に抽象的で理解しづらいという側面を持つ。そこで、可視化を行えば、具体性に富み、直感的に理解しやすいものとなることが期待できる。

本研究では、高次元アーベル群の可視化、対称群と正多面体の回転との同型、および1次元ホモロジー群の可視化の手法を提案する。

2 高次元アーベル群の可視化

アーベル群とは、群の基本性質である、

- 結合法則 $\forall a,b,c,\ (ab)c = a(bc)$
- 単位元の存在 $\exists e, \forall x,\ ex = xe = x$
- 逆元の存在 $\forall x, \exists y,\ xy = yx = e$

に加えて、

- 交換法則 $\forall a,b,\ ab = ba$

が成立する群であり、演算がしばしば加法で表されるので加群とも呼ばれる [1]。アーベル群は次元数が等しいベクトル場と同型であり、商群や巡回群は除数に当たるベクトルを被除数に当たるベクトルに適当に加えたり引いたりしたものになる。

3次元までのベクトル場は容易に可視化できるが、それより次元が高くなると可視化は急に困難になる。本研究では、高次元のベクトルを複数の3次元ベクトルに分割することで、任意のベクトルを表示し、次元数が等しいアーベル群を可視化している。本例では、6個の要素 $x_1, x_2, \ldots, x_6$ で生成される群を可視化し、$x_1 + x_1 + x_2 + (-x_3) + (-x_4) + x_5 + x_5 + x_6$ を表示している (図1参照)。

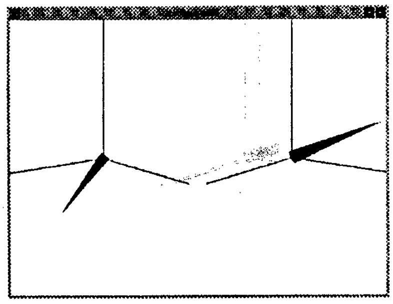

図 1: 6次元アーベル群の可視化、左右の3次元座標の組で6次元の群を示している

3 対称群・交代群と正多面体

$(1,2,\ldots,n)$ の各要素を、任意に入れ換えてできるもの全体は群を作る。これを n 次対称群と呼ぶ。また上記の入れ換えの操作のうち、任意の2個の要素を入れ換える操作を互換と呼び、対称群のすべての要素は0回以上の互換の積で表される。対称群のうち、偶数回の互換の積でできるものはまた群 (対称群の部分群) を作り、これを n 次交代群と呼ぶ。

正 n 面体 $(n = 4,6,8,12,20)$ を、その重心を中心として3次元空間内で回転させ、自分自身に重ね合わせるもの全体は群を作る。これを $P(n)$ とするとき、$P(n)$ は以下の対称群・交代群と同型である。ただし $\mathcal{S}_n$ は n 次対称群、$\mathcal{U}_n$ は n 次交代群を表す [1]。

$$P(4) \simeq \mathcal{U}_4,\ P(6) \simeq P(8) \simeq \mathcal{S}_4,$$
$$P(12) \simeq P(20) \simeq \mathcal{U}_5$$

本研究では、正6面体 (図2参照) と正12面体について、対称群・交代群との同型を可視化している。特に正多面体の回転をアニメーションで行い、対称群・交代群との同型を直感的に示している。

4 ホモロジー群の可視化

m 次元複体 K に属するすべての r 単体 $(0 \le r \le m)$ を $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ とし、それぞれに任意に向きをつけておく。有向単体 $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ を生成元とするアーベル群を K の r 次元鎖群と呼び、$C_r(K)$ と書く。

Visualization of Algebraic Structures
Shinsuke Kishimoto†, Hirohisa Hioki†, Yoshihisa Shinagawa† and Tosiyasu L. Kunii‡
†The University of Tokyo
‡The University of Aizu

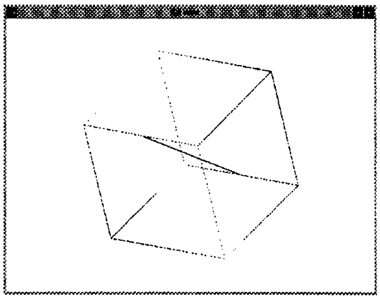

図 2: 正 6 面体の回転、中心を通る軸について回転している途中

$C_r(K)$ の元 c を r 鎖といい、形式的な 1 次結合

$$c = \sum_{i=1}^{k} n_i \sigma_i, \; n_i \in \boldsymbol{Z}$$

の形で表す。

$r > 0$ に対し、有向 r 単体 $\sigma = (p_0 p_1 \ldots p_r)$ の境界 $\delta_r(\sigma)$ を $(r-1)$ 鎖

$$\delta_r(\sigma) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i (p_0 p_1 \ldots p_{i-1} p_{i+1} \ldots p_r)$$

として定義し、r 鎖 c に対しては線形的に

$$\delta_r(c) = \sum_{i=1}^{k} n_i \delta_r(\sigma_i)$$

と定義する。

条件

$$\delta_r(c) = 0$$

を満たす $C_r(K)$ の元 c を K の r 輪体という。K のすべての r 輪体の集合は $C_r(K)$ の部分群をなす。これを K の r 次元輪体群と呼び、$Z_r(K)$ で表す。

$$Z_r(K) = \mathrm{Ker}\, \delta_r = {\delta_r}^{-1}(0)$$

$$c = \delta_{r+1}(d) \text{を満たす} d \in C_{r+1}(K) \text{が存在する}$$

ような $C_r(K)$ の元 c を K の r 境界輪体という。K のすべての r 境界輪体の集合は $Z_r(K)$ の部分群となる。これを K の r 次元境界輪体群といい、$B_r(K)$ で表す。

$$B_r(K) = \mathrm{Im}\, \delta_{r+1} = \delta_{r+1}(C_{r+1}(K))$$

商群

$$H_r(K) = Z_r(K)/B_r(K)$$

を複体 K の r 次元ホモロジー群という [2]。本研究では、特に 1 次元のホモロジー群についての可視化を行う。2 次元空間 (平面) に描かれた図形 K (以下 K を適宜省略) を適当に三角形に分割すると、

$$Z_1 \simeq \{\text{任意の線分を通るループ全体の集合}\}$$
$$B_1 \simeq \{\text{分割した三角形が作るループの集合}\}$$

となり、$H_1 = Z_1/B_1$ は図形の内部にある「穴」をその内側に含むループの集合と同型となり、「穴」とループが 1 対 1 に対応する [3] 。またループ 1 つが $\boldsymbol{Z}$ と同型であるから、$H_1 \simeq \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{Z}$ (ループの数だけの $\boldsymbol{Z}$ の直和) となる。

本手法では、$H_1 = Z_1/B_1$ による計算過程を、アニメーション的手法により段階的に表示している (図 3、図 4参照) 。三角形分割の方法や順序によって、H を示すループの導出過程や最終的な形状が異なるが、ループの個数は変化していないことがわかる。

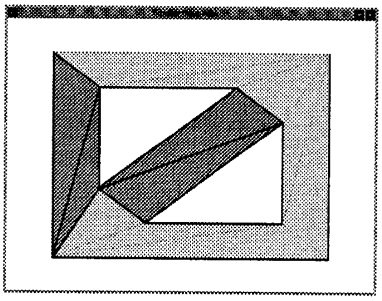

図 3: 1 次元ホモロジー群の導出過程 (途中図) 、演算が完了し境界輪体群に属さなくなった三角形は色が薄くなっている

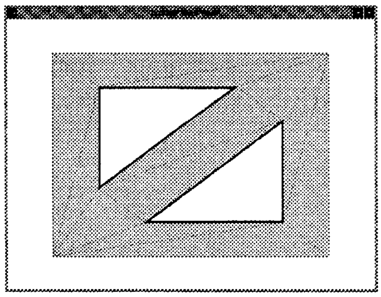

図 4: 1 次元ホモロジー群の導出結果、「穴」の部分の太い実線のループがホモロジー群に対応する

参考文献

[1] 近藤武. 岩波講座 基礎数学「群論 I」, pp. 1–51. 岩波書店, 1976.

[2] 小林貞一. 現代数学ゼミナール 3 「トポロジー」, pp. 47–74. 近代科学社, 1987.

[3] T. L. Kunii, H. Hioki, and Y. Shinagawa. Visualizing highly abstract mathematical concepts: A case study in animation of homology groups. In Tat-Seng Chua and Tosiyasu L. Kunii, editors, *Proc. of the First International Conference on Multi-Media Modeling MULTIMEDIA MODELING*, volume 1, pp. 3–30, 1993.