高速自動微分法と区間解析を用いたレイトレーシング法の評価

5H－4

原 秀人　朴 敬蘭　星 守　大森 匡
電気通信大学 大学院 情報システム学研究科*

1 はじめに

Synder[1] はレイトレーシング法において区間解析が有効であることを示した [2]. 区間解析を実用的に使うには導関数値の保証範囲を自動的により正確に求める必要がある. そこで我々は区間演算と高速自動微分法を組み合わせる方法を提案してきた [2,4]. ここではその方法を用いて実際に陰曲面を生成した場合の評価を行ったのでこれを報告する.

2 高速自動微分法を用いた区間解析

2.1 区間解析

区間 X が与えられた時 $f(x)(x|x \in X)$ の保証範囲を与える関数を inclusion function$\square f(X)$ という. $\square f(X)$ は区間演算を行う事などによって得ることができる. $\square f(X)$ が 0 を含むかどうかで, 方程式 $f(x) = 0$ の解が X に含まれる可能性を調べる事ができる.

2.2 Interval Newton 法

与えられた区間を２分割して再帰的に区間解析を行う事により, 解の近似値を得ることができる.

この方法は目的の関数さえ用意すればよいという利点があるが、収束速度が一次と遅い. また CSG などに使うためには複数の解を求める必要があるが, 解の唯一性を保証できないために一つの解が複数に見えてしまうといった問題を生じる.

そのような問題に対しては、二次の収束速度をもつ反復法として知られている Newton Raphson 法の区間版である Interval Newton 法を用いる事によって解決できる. 区間 X の中点を x_k とするとき Interval Newton 法は次のような漸化式で表現できる.

$$X_{k+1} = [x_k, x_k] - \frac{[f(x_k), f(x_k)]}{f'(X_k)} \cap X_k$$

$X_{k+1} = \phi$ となったとき, その区間に解は存在しないと言える. Newton Raphson 法では導関数を別に導出したり, 数値微分を用いたりする事が多いが、Interval Newton 法では導関数値の範囲を保証する必要があるためそれらの方法を用いる事ができない.

2.3 高速自動微分法

正確な導関数値を求めるには目的の関数の他に導関数を用意するのが一般的であるが、合成関数の微分の考え方に基づいて自動的に導関数値を生成する高速自動微分法 (FAD) がある. 高速自動微分法と区間演算を組み合わせる事によって、区間 X における導関数値の保証範囲 $\square f'(X)$ を自動的に求める事ができる.

関数の計算過程は、基本演算を node とする非巡回グラフ (計算グラフ) で表される. 高速自動微分法のうち Top down 算法と呼ばれる算法は, 計算グラフを関数側から変数の方へたどるパス上にある node の要素的偏導関数の積を計算することによって求める.

導関数生成の際に計算グラフを記憶しておく事によって、計算の途中結果を再利用し高速に計算を行えるほか、高次の導関数値も精度よく求める事ができる.

また高速自動微分法には、変数の値によって計算過程が変化するような関数に対しても容易に導関数値を求められるといった利点もある.

2.4 Interval Halley 法

Newton Raphson 法と同様に Interval Newton 法も重根を含む区間では使えない. Taylor 展開の二次の微分の項まで展開した式を使う Halley 法の区間版である Interval Halley 法を使うことにより重根を含む区間を扱えるようになる.

同時に, より速い収束が期待できる. Interval Halley 法は次の漸化式で表される.

$$X_{k+1} = [x_k, x_k] + \frac{[-2f(x_k), -2f(x_k)]}{[f'(x_k), f'(x_k)] \pm \sqrt{D}} \cap X_k$$

ただし,

$$D = [f'(x_k)^2, f'(x_k)^2] - [2f(x_k), 2f(x_k)]f''(X_k)$$

Interval Newton 法同様、$X_{k+1} = \phi$ ならその区間に解は存在しない.

Interval Halley 法では二次の導関数値の保証範囲が必要があるが、これは高速自動微分法により容易に求める事ができる.

2.5 Inclusion Function の保証範囲

区間演算では演算のたびに保証区間が広くなってしまうので、$\square f(X)$ は、$f(x)(x|x \in X)$ よりもかなり広く

*Evaluation of Ray Tracing Algorithm with Interval Method and Fast Automatic Differentiation
H.Hara, K.Park, M.Hoshi, T.Ohmori, (U. Electro-Comm.)

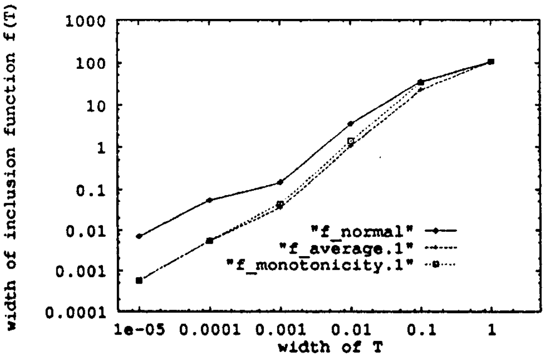

図1.単純な区間演算による□$f(T)$(上)と導関数値を利用した□$f(T)$(下)の平均の比較. $f(t)$は陰曲面$g(x,y,z) = \sum e^{r(x,y,z)}$の形の関数と視線との交点を表す式(256個). $r(x,y,z)$は二次関数.

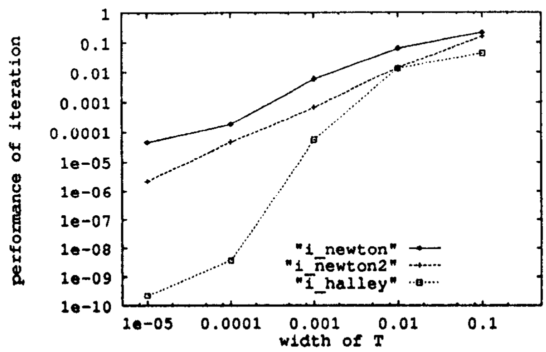

図2.Interval Newton 法(上), 二次の導関数値を使って求めた□$f'(T)$を用いたInterval Newton法(中)およびInterval Halley法(下)の収束速度. $f(t)$は陰曲面$g(x,y,z) = \sum e^{r(x,y,z)}$の形の関数と視線との交点を表す式(256個). $r(x,y,z)$は二次関数.

なってしまう. このことは反復法の収束速度を落す原因になる. 導関数値の範囲を保証することにより, 平均値の定理から得られる包含関係[3]や, 関数の単調性を利用してより精密な□$f(X)$を求める事ができる.

3 評価

3.1 Inclusion Functionの保証範囲

先に述べた平均値の定理や単調性を利用した□$f(T)$を単純な区間演算による□$f(T)$と区間の幅ごとに比較してみた[図1].

図では分かりにくいが平均値の定理と単調性を利用した方法はほぼ同じ値であり, このことから単純な区間演算を用いた方法と比べてより精密な□$f(T)$を得られることがわかる.

3.2 収束速度

Interval Newton法とInterval Halley法について, 一回の反復でどれくらいの収束があるかを調べてみた(図2).

図2において横軸は与えられた区間の幅を, 縦軸は一回の反復で写像の区間が元の区間にたいしてどれくらいの大きさになるかを示している.

この図からInterval Newton法, Interval Halley法とも区間が狭くなる(=解に近づく)につれて収束が速くなっているといえる. 全般にInterval Halley法の方が速い収束をしているが, 与えられた区間の幅が狭くなるにつれその差はより大きくなっていることがわかる.

またInterval Newton法において, 二次の導関数値を求めてより精密な□$f'(T)$を求めたところ通常の□$f'(T)$を用いたものに比べて収束が速くなった.

これらことから高次の導関数値の保証範囲を利用する手法は, 区間反復法の収束を速くするのに大きな効果があるといえる.

4 まとめと今後の課題

今回の実験で区間がある程度狭くなれば, 高速自動微分法を用いた区間解析が, 解の存在を保証しながら方程式を解く場合に有効である事を具体的に示せた.

今後の課題としては, 良い初期値を与える方法を確立する事があげられる.

レイトレーシング法における, 区間解析を用いた反復近似法の初期値を与える方法としては,

- 与えられた空間をあらかじめ分割して部分空間における解の存在可能性を区間解析により調べておく.
- 幅のある視線に対しても区間解析が有効であるので, それを用いてあらい解像度でいったん解を調べる事により, 初期値の区間を狭めておく.

等の方法が使える可能性がある. また, 今回は触れなかったがパラメタ曲面に関しては簡単に曲面のバウンディングボックスを生成できるので, それを使った高速化についても検討したい.

参考文献

[1] K. Park, M. Hoshi, T. Ohmori, *New and Robust Ray Intersection Using Interval Analysis and FAD.* 情報処理学会第49回全国大会講演論文集(2), pp.333-334, 1994.

[2] Jhon M. Snyder ,*Generative Modeling for C.G. and CAD.* Academic Press,INC., 1992.

[3] 杉原 正顯, 室田 一雄 , 数値計算法の数理. 岩波書店, 1994.

[4] K. Park, M. Hoshi, T. Ohmori, H. Hara, *Computer Graphics Algorithm using Interval Analysis and FAD.* グラフィックとCADシンポジウム論文集, pp.79-85, 1995.