ポリゴンデータ頂点の法線ベクトルの高品質算出法

3H−9

谷口 雅昭，小出 昭夫
日本アイ・ビー・エム (株) 東京基礎研究所

1 はじめに

ポリゴンデータのレンダリングにおいて、各頂点の座標とともに与える法線ベクトルの精度はシェーディングなどの精度に影響するので重要である。各頂点の法線ベクトルをポリゴンデータから求める方法として、注目している頂点を含むパッチ面の外積より求めた法線を平均化する方法が存在するが、各ベクトルに与える比重を適切に与えないと最終的に得られるベクトルの精度が低下する結果になる。本論文は球面に対して正しい法線の値を与えるように各パッチ面の法線に与える比重を決定し、頂点の法線を求める方法を提案する。また、この方法を一般の凸曲面に適応した場合、他の方法より優れていることを数値実験により示す。

2 従来の法線ベクトル平均化手法

法線を求める頂点の位置ベクトルを $\mathbf{x}$ 、隣接する頂点の位置ベクトルを $\mathbf{x}_j$ 、注目している頂点と隣接する頂点への変位ベクトルを、

$$\mathbf{d}_j = \mathbf{x}_j - \mathbf{x} \tag{1}$$

と表す。

一般的に各頂点の法線ベクトルを求める手法は次式で表される。

$$\mathbf{n} = \frac{\sum_j w_j \mathbf{d}_j \times \mathbf{d}_{j+1}}{\left\| \sum_j w_j \mathbf{d}_j \times \mathbf{d}_{j+1} \right\|} \tag{2}$$

ここで w_j はベクトルを平均化するために与える比重であり、従来の手法では、

$$w_j = 1 \tag{3}$$

または、

$$w_j = 1 / \|\mathbf{d}_j \times \mathbf{d}_{j+1}\| \tag{4}$$

が用いられている [1][2]。

3 球面に対して真の法線を与える法線算出法 (手法-1)

頂点での法線ベクトルを、球面で真の法線ベクトルを与える手法を用いて求める場合、次のような比重 w_j を式 (2) に与えればよい。

$$w_j = \frac{1}{\|\mathbf{d}_j\|^2 \|\mathbf{d}_{j+1}\|^2} \tag{5}$$

球面の場合得られるベクトルが正しい法線となることを以下に示す:

一般に外積はそれと一時独立な単位ベクトル $\mathbf{e}$ を用いて、

$$\mathbf{d}_j \times \mathbf{d}_{j+1} = \sigma_j \mathbf{e} - (\mathbf{e}\cdot\mathbf{d}_{j+1})(\mathbf{e}\times\mathbf{d}_j) + (\mathbf{e}\cdot\mathbf{d}_j)(\mathbf{e}\times\mathbf{d}_{j+1}) \tag{6}$$

と表せる。ここで、$\sigma_j = \mathbf{e}\cdot(\mathbf{d}_j \times \mathbf{d}_{j+1})$ である。この式は両辺に $\mathbf{e}, \mathbf{d}_j, \mathbf{d}_{j+1}$ をかける (内積をとる) ことにより証明される。

式 (6) を比重を与え頂点の回りの隣接面について加えるとベクトル $\mathbf{e}$ は法線ベクトル $\mathbf{n}$ と書き換えることができる。

$$\begin{aligned}\sum_j w_j \mathbf{d}_j \times \mathbf{d}_{j+1} &= (\sum_j w_j \sigma_j)\mathbf{n} \\ &\quad + \sum_j (w_{j-1}\mathbf{n}\cdot\mathbf{d}_{j-1} - w_j \mathbf{n}\cdot\mathbf{d}_{j+1})(\mathbf{n}\times\mathbf{d}_j)\end{aligned} \tag{7}$$

一方、頂点 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{x}_j$ が半径 R の球面上にある条件は法線ベクトル $\mathbf{n}$ を用いて

$$\|\mathbf{d}_j + R\mathbf{n}\| = R \tag{8}$$

で与えられる。この式の両辺を 2 乗し整理すると

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{d}_j + \frac{1}{2R}\|\mathbf{d}_j\|^2 = 0 \tag{9}$$

を得る。これと式 (5) を式 (7) の右辺に代入すると

$$\sum_j w_j \mathbf{d}_j \times \mathbf{d}_{j+1} = (\sum_j w_j \sigma_j)\mathbf{n} \tag{10}$$

を得る。これは式 (2) によって得られるベクトルが球の法線ベクトルのスカラー倍であることを示している。■

A High-Quality Method for Finding Normal Vectors from Polygonal Data
Masaaki TANIGUCHI (taniguti@trl.ibm.co.jp),
and Akio KOIDE (koide@trl.ibm.co.jp)
IBM Japan Ltd., Tokyo Research Laboratory
1623-14, Shimotsuruma, Yamato-shi, Kanagawa-ken 242, Japan

4 頂点の隣接面を球面に近似した場合の法線算出法 (手法–2)

一般的な場合では、頂点とその隣接面を球面に近似した場合の法線ベクトルを求めることにする。このようなベクトルは式 (11) で定義する関数 $P(\mathbf{n})$ を最小化する単位ベクトル $\mathbf{n}$ を求めることにより得られる。

$$P(\mathbf{n}) = \mathbf{n}^T S \mathbf{n} \tag{11}$$

ここで S は次に示す 3 次対称行列である。

$$\mathbf{u} = \sum_j w_j \mathbf{d}_j \tag{12}$$

$$S = \sum_j \frac{w_j}{\mathbf{d}_j \cdot \mathbf{d}_j} \mathbf{d}_j \mathbf{d}_j^T - \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^T}{\sum_j w_j \mathbf{d}_j \cdot \mathbf{d}_j} \tag{13}$$

式 (11) は 3 次元対称行列の期待値の最小化問題であり、通常の最小化手法でも、最小固有値の対応固有ベクトルによっても簡単に解を算出できる。なお、法線を近似球面の外側にとるには、

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} < 0 \tag{14}$$

となるように法線ベクトル $\mathbf{n}$ の向きを定めれば良い。

式 (11)(12)(13) は次のように導出される:

式 (9) より、頂点の隣接面を球面に近似することは、次の関数を α, n に関して最小化することと定式化できる。

$$P(\mathbf{n}, \alpha) = \sum_j \frac{w_j}{\mathbf{d}_j \cdot \mathbf{d}_j} \|\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}_j + \alpha \mathbf{d}_j \cdot \mathbf{d}_j\|^2 \tag{15}$$

なお、$\alpha = 0$ は半径無限大の球面、すなわち平面を表す。この式をα について最小化すると

$$P(\mathbf{n}) = \sum_j \frac{w_j}{\mathbf{d}_j \cdot \mathbf{d}_j} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}_j)^2 - \frac{\left\{\sum_j w_j \mathbf{n} \cdot \mathbf{d}_j\right\}^2}{\sum_j w_j \mathbf{d}_j \cdot \mathbf{d}_j} \tag{16}$$

この式について $\mathbf{n}$ を和の外に出すことにより式 (11) を得る。 ∎

5 数値実験による提案手法の検証

提案手法 (1), (2) と従来手法との比較のため、(0,0,0) を頂点 $\mathbf{x}$ として含み、そこでの法線ベクトルが (0,0,1) となるように 1) 球面, 2) 円柱側面, 3) 2 次曲面, 4) 3 回転軸対称鞍曲面 を定義し、疑似乱数によって選んだ各曲面上の 5 点の隣接点と、頂点 $\mathbf{x}$ に対し従来手法と提案する手法により法線ベクトルを求め、その誤差を検討した。

表 (1) は手法 (1A) ~ (1B) 従来手法とその変形, (2A) 提案する手法–1, (3A) ~ (3C) 提案する手法–2 について、理論上の法線ベクトル (0,0,1) との角度のずれを誤差とし、その 2 乗平均を求め表したものである。

計算結果は実用上多くの場合を占める凸曲面に対し、従来手法より優位な結果を示している。さらに、頂点が球面上にあると単に仮定した手法 (1) を一般的な場合に適用することが、有効であることを示している。

6 まとめ

ポリゴンデータから曲面の法線ベクトルを求めるために、頂点とその隣接面が球面上にあるとして求める手法を提案した。また、その手法が従来手法に対して多くの場合優位な結果を示すことを数値実験により示した。

参考文献

[1] Jackie Neider et al. *OpenGL Programming Guide.* 1993.

[2] W. J. Schroeder et al. Decimation of Triangle Meshes. *Computer Graphics*, 26(2):65–70, July 1992.

手法	サンプル数 / w_j	1. 球面	2. 円柱側面	3. 2 次曲面	3. 2 次曲面 (放物面)	3. 2 次曲面 (鞍点)	4. 3 回転軸対称鞍曲面
	サンプル数	6912	6909	6912	6912	6912	6912
1A	1	23.06	23.83	23.82	12.68	18.76	8.99
1B	$1/\|\mathbf{d}_j \times \mathbf{d}_{j+1}\|$	17.47	16.77	14.81	9.85	16.76	9.58
1C	$1/(\|\mathbf{d}_j\|\,\|\mathbf{d}_{j+1}\|)$	12.45	15.85	11.93	8.87	15.65	7.48
1D	$1/(\|\mathbf{d}_j\|^2 + \|\mathbf{d}_{j+1}\|^2)$	15.06	17.03	14.47	9.53	16.23	7.71
2A	$1/(\|\mathbf{d}_j\|^2\,\|\mathbf{d}_{j+1}\|^2)$	0.00	10.09	6.17	7.24	14.60	6.87
3A	$\|\mathbf{d}_j\|^2$	0.00	13.28	7.06	10.37	21.84	9.39
3B	1	0.00	11.31	5.97	8.26	17.46	6.92
3C	$1/\|\mathbf{d}_j\|^2$	0.00	10.95	6.34	7.57	15.79	6.01

表 1: 各手法により求めた法線ベクトルの誤差の比較