

微分位相制約を用いた多重スケール曲線・曲面設計

2H-8

高橋 成雄 品川 嘉久

東京大学

1 はじめに

近年ウェーブレットによる曲線、曲面の階層表現が注目されている。しかし、階層ごとの制御点を直接動かすか、制約に対し適当な階層を選ぶものに限られ、階層ごとに異なる制約を付加できる手法が存在しない。本論文では、曲線・曲面の階層的設計手法について述べる。形状はスプライン・ウェーブレットを基底関数に持ち、その形状を制御するものとして臨界点等の微分位相制約を与える。それらの制約は、形状の滑らかさをエネルギー関数にとり、変分法を用いて解かれる。階層的設計を可能にするための、スケールごとの制約を満たした形状設計についても述べる。

2 スプライン・ウェーブレット

ここでは離散ウェーブレット、つまりウェーブレット母関数を 2^{-j} 拡大、 $2^{-j}k$ 平行移動 ($j, k \in \mathbb{Z}$) して基底を生成したものを用いる。ここで、 j はスケール・レベルである。ウェーブレットによる形状の階層は、高周波成分を表すウェーブレットが張る空間 W^j と、それに対応する低周波成分を表すスケール関数が張る空間 V^j とで構成される。またこれらの空間は、ウェーブレット分解によって $V^n = W^{n-1} \dot{+} W^{n-2} \dot{+} \dots \dot{+} W^{n-m} \dot{+} V^{n-m}$ と、直和分解される (図1)。

スケール・レベルごとの形状操作を考えると、スケール関数とウェーブレットの張る空間 V^j, W^j は直交していることが望ましい。そのようなウェーブレットの種類の中で、本研究ではスプライン・ウェーブレットを用いる。図2のように、スプライン・ウェーブレットは比較的振動が少なく、さらに対応するスケール関数は滑らかな単峰形をしていて、形状設計において良い性質を持つ。さらに形状の定義域を閉区間に限れば、ウェーブレット分解・再構成が行列演算で表現される [2]。具体的には、次のようになる。まず、レベル j のスケール関数基底とウェーブレット基底を並べたベクトルをそれぞれ Φ^j, Ψ^j 、これに対応する重みベクトルをそれぞれ c^j, d^j と書くことにする。これにより、スケール関数空間とウェーブレット空間に含まれる形状はそれぞれ $c^{j^t} \Phi^j, d^{j^t} \Psi^j$ と線形結合で表現される。ウェーブレット分解、再構成は、曲線の場合、行列 A^j, B^j, P^j, Q^j を用いて次のように書ける。曲面の場合もほぼ同様に書ける。

$$\begin{pmatrix} c^{j-1} \\ d^{j-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^j \\ B^j \end{pmatrix} (c^j)$$

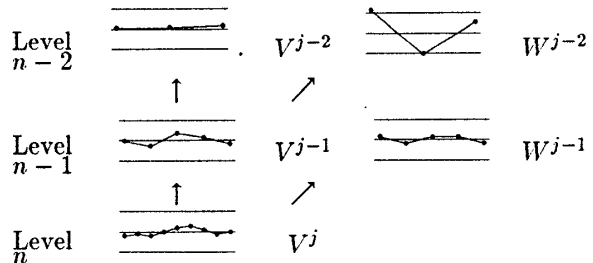


図1: スケール関数とウェーブレットの張る空間



図2: スプライン・ウェーブレットとスケール関数

$$(c^j) = \begin{pmatrix} P^j & Q^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^{j-1} \\ d^{j-1} \end{pmatrix}$$

3 微分位相制約による形状設計

次に微分位相制約を与えた時に、どのように形状を設計するかについて述べる。微分位相制約としては、頂上、峠、谷底などの臨界点や、それらをつなぐ尾根線、谷線が与えられる。本研究においては、このような微分位相制約を満たしながら、余計な臨界点等を生じないように形状の曲げや伸びを最小化していく、変分法を用いた形状設計を用いる [1, 4]。

まず、曲線の基底 $b_c(t)$ はスケール関数、曲面の基底 $b_s(u, v)$ は、 $b_s(u, v) = b_c(u) \cdot b_c(v)$ で表されるとする。すると曲線、曲面形状は、それぞれ基底の線形結合 $w_c(t) = p_c^t b_c(t), w_s(u, v) = p_s^t b_s(u, v)$ で表される。ここで、 b_c, b_s は基底を並べたベクトル、 p_c, p_s はそれに対応する重みベクトルとする。この時、エネルギー関数を曲線、曲面に対して、次のように定義する。ここで、 H_c, H_s は行列の形で書かれる。

$$E_c(w_c) = \int \alpha (Dw_c)^2 + \beta (DDw_c)^2 = p_c^t H_c p_c$$

$$E_s(w_s) = \int \sum_{i,j=u,v} \alpha D_i w_s D_j w_s + \beta (D_i D_j w_s)^2 = p_s^t H_s p_s$$

微分位相制約に関しては、[4] に述べられているように、行列 M を用いて $Mp = q$ という形の連立線形方程式として書くことができる。例えば、求める形状 w が引数 x のときある点を通るという点制約は、

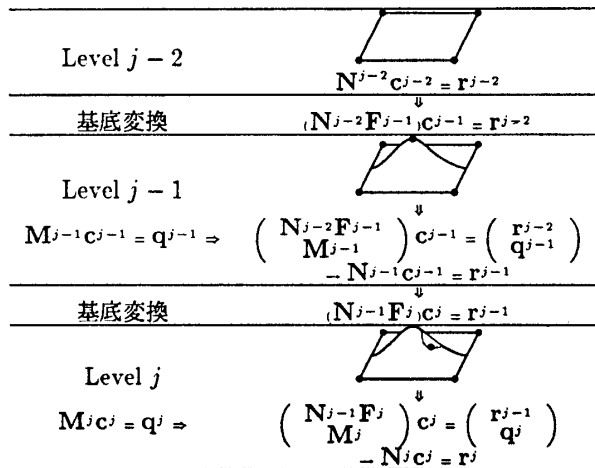


図 3: レベル間の制約の変換

$w(x) = p^t b(x) = w_0$ という方程式で書け、方程式 $Mp = q$ のひとつの行を構成する。形状を求める際は、このような制約の方程式にラグランジュ乗数 y をかけたものを含めた、 $\| \frac{1}{2} p^t H p + (Mp - q)^t y \|$ を最小化して求めることにする。求める形状は、 p に関する微分をとると次のものを解くことで求められる。

$$\begin{pmatrix} H & M^t \\ M & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}$$

4 多重スケール形状設計

前節の手法により、レベルごとの形状設計はできる。本節では、すべてのレベルにおいて、制約を満たしながら設計をする手法について述べる。まず、それぞれ違うレベルの基底に対して記述されている制約を、同じ基底に対して記述されているものに変換する。これは、隣接レベル同士の基底が、ウェーブレット分解行列で関係づけられているため可能である。例えば、レベル $j-1$ の制約をレベル j に変換することを考えよう。これらのレベルの基底の間は、適当な行列 F^j を用いて $c^{j-1} = F^j c^j$ という関係で表されることに注意する(曲線の場合は、 $F^j = A^j$)。すると、レベル $j-1$ の制約を表す方程式 $M^{j-1} c^{j-1} = q$ は、 $(M^{j-1} F^j) c^j = q$ と、レベル j の基底に対する方程式に変換できる。ここで考えられる手法として、図 3 のように、制約を粗いレベルから変換してレベルごとに重ね合わせていき、最後に一番細かいレベルで制約を解くことが考えられる。しかし、この手法によると形状設計の際、予想外の形状の起伏が生じてくる。

そこで本研究では、隣接レベル間の形状の差を求める部分にこの手法を使うことにする。これは、変分法による形状設計手法が余計な変位を減らす方向に形状を制御する性質を利用している。すでにレベル $j-1$ までの形状 $w^i (i \leq j-1)$ は求められているとして、レベル j の形状を次のようにして求める。まず、レベル $j-1$ までの制約は、与えられた制約をそのレベルの求められている形状の分だけ移動して、新しい制約とする。次に、レベル j の制約は、レベル $j-1$ の形状に対して移動する。例えば点制約の場合は、求めるレベル $i (i \leq j)$ の形状を w_d^i とすると、今述べたように

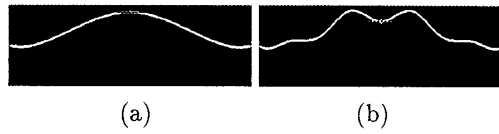


図 4: 曲線の設計例

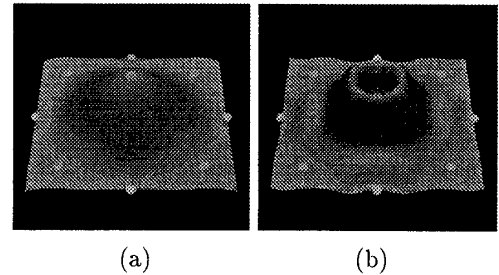


図 5: 曲面の設計例

移動した $w_d^i(x) = w_0^i - w^{\min(i,j-1)}(x)$ を新しい制約の方程式とする。この新しい制約に対して、上記のように粗いレベルから重ね合わせて、隣接レベル間の差についての変分法を用いた形状設計を実現する。最後に、得られたレベル間の差をレベル $j-1$ の形状に足し込み求めるレベル j の形状とし、ウェーブレット分解によってその差を粗いレベルに伝播させる。

このような隣接レベル間の処理を粗いレベルから細かいレベルへ順々に行なうことで、多重スケール形状設計を実現する。図 4、図 5 は、それぞれ曲線、曲面の設計例である。両方とも、粗いレベルで大局的な山を作り(図 4(a), 5(a))、細かいレベルで窪みをつけている(図 4(b), 5(b))。

5 おわりに

本手法は体系的な手法で多重スケールでの設計を実現しているが、設計された形状に多少振動が残る場合がある。今後の課題として、設計された形状から逆に微分位相制約を自動的に抽出し [3]、その制約の方を取捨選択して形状に戻すことを考えている。

参考文献

- [1] S. J. Gortler and M. F. Cohen. "Hierarchical and Variational Geometric Modeling with Wavelets.", *ACM Symposium on Interactive 3D Graphics*, pages 35-42, 1994.
- [2] E. J. Stollnitz, T. DeRose, and D. H. Salesin. "Wavelets for Computer Graphics: A Primer, Part 2.", *IEEE Computer Graphics and Applications*, 15(4):75-85, Jul. 1995.
- [3] S. Takahashi, T. Ikeda, Y. Shinagawa, T. L. Kunii, and M. Ueda. "Algorithms for Extracting Correct Critical Points and Constructing Topological Graphs from Discrete Geographical Elevation Data.", *Computer Graphics Forum*, 14(3):181-192, 1995. (Eurographics'95).
- [4] W. Welch and A. Witkin. "Variational Surface Modeling.", *Computer Graphics (Proc. Siggraph)*, 26(2):157-166, Jul. 1992.