3次の補間曲線の滑らかさとスプラインウエーブレット*

2H－7

○黒田　満† 古川　進‡
豊田工業大学† 山梨大学工学部‡

1. はじめに

競争の激化から，人の感性に訴えるような高度に意匠的な曲線・曲面製品が増えてきている．そこで，人の直観に結びつきやすいパラメータで形状制御できる補間曲線でしかも「滑らか」な曲線は重要である．

3次スプライン補間曲線は接続 (通過) 点では2次の ($C^{[2]}$) 連続性におちるためにそこで単調性が失われる．3次の $C^{[2]}$ 補間曲線をなんとか $G^{[3]}$ 連続に高めてみると，通過点付近は改善されるけれども大域的には必ずしも満足のいくものになるとは限らない[1]．逆に，Subdivision 法で曲線分を2進分割して通過点近傍の不具合を新たな接続点に分散させて全体を滑らかにしようとする研究はまだなされていない．

一方，信号・画像処理の分野でウエーブレットの多重解像度解析によるスムージングが成果が得ている[2,3,4]．スプライン関数を使ったウエーブレット[2,5]による曲線の階層化は一種の Subdivision である．もっとも，曲線は指定点を通らなくなる．しかし，ウエーブレット解析はフーリエ解析と違って周波数情報に位置情報も変換・逆変換するために，「補間」条件を維持したままスムージングできると考えられる．

そこで本研究では3次の $C^{[2]}$ 補間曲線を3次 B-スプラインの離散ウエーブレットによって，補間の機能を維持したまま，ある周波数帯に制限された単調で滑らかな曲線に変換する方法を導くことにする．

2. 補間曲線の滑らかさ

曲線の「滑らかさ」は主観的概念と考えられてきたが，最近では曲率のプロファイルが少ない単調な部分からなるような曲線が滑らかであると認識されるようになってきている．図1のように3次の C^2 補間曲線 (上) の曲率プロファイル (下) をとってみると通過点で単調性が崩れているのがわかる．

曲線が指定点列を通過する条件は形状を試行錯誤的に設計していくために一時的・便宜的に拘束しただけ

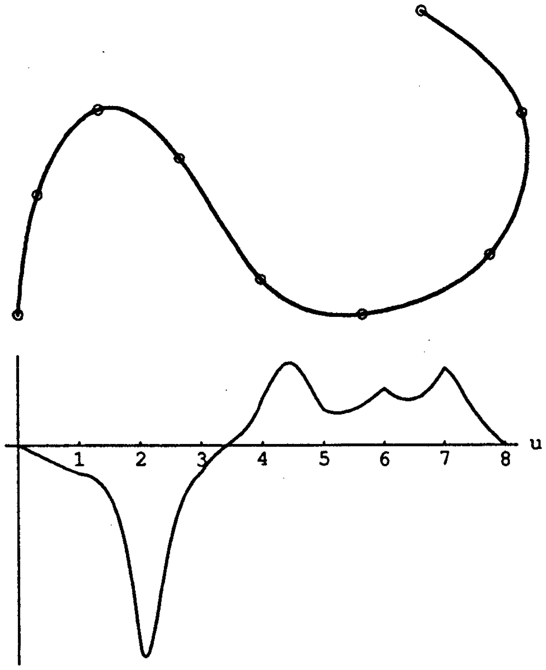

図 1　補間曲線と曲率

の場合があるかもしれない．しかし，本研究では補間条件を譲れない絶対的条件と考えることにする．従って，スムージングと通過点位置調整を平行して行なう必要がある．これは困難な問題である．もっとも，通過点間の形は自由なので無限の可能性の中から選べばよい．

3. スプライン ウエーブレット

ここではユニフォーム3次の B-スプラインによるスプライン ウエーブレットを用いる．対象曲線 $\boldsymbol{r}(u)$ の各 x, y, z 成分を代表的に $r(u)$ と表すことにすると，ウエーブレットによって $r(u)$ は次のように階層的曲線列 $\{g_i(u)\}$ の和としてあらわすことができる．$\{g_i(u)\}$ はいろいろなレベルで2進分割された区分3次 $C^{[2]}$ 関数である．右辺では分解の残りである $r_{-l}(u)$ を除いて，左の項ほど高周波成分をあらわしている．

$$r(u) = g_{-1}(u) + g_{-2}(u) + \ldots + g_{-l}(u) + r_{-l}(u). \quad (1)$$

各階層化のプロセスは次のようである．

$$r_j(u) = r_{j-1}(u) + g_{j-1}(u), \quad r(u) \equiv r_0(u), \quad (2)$$

ただし，

*Fairness of Cubic Interpolating Curve and Spline Wavelets
†Mitsuru KURODA and ‡Susumu FURUKAWA
†Toyota Technological Institute, 2-12-1 Hisakata, Tempaku, Nagoya 468
‡Yamanashi University, 4-3 Takeda, Koufu, Yamanashi 400

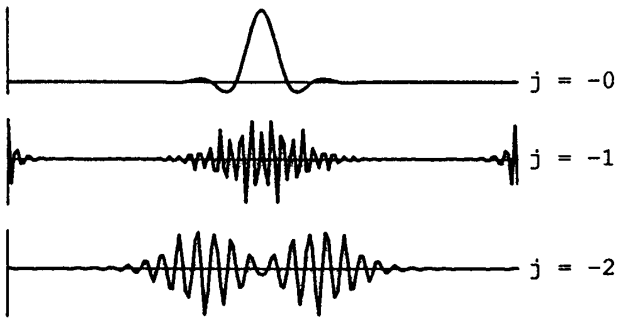

図 2 基本カーディナルスプラインの分解

$$\begin{cases} r_j(u) = \sum_k c_k^j N_4(2^j u - k), \\ g_j(u) = \sum_k d_k^j \psi(2^j u - k), \end{cases} \tag{3}$$

$$\psi(u) = \sum_{j=0}^{10} e_l N_4(2u - l). \tag{4}$$

ここで，e_l はあらかじめ決まる定数であり，階層化のレベル j の曲線 $g_j(u)$ は $r(u)$ の解像度 2^j の成分である．実際の計算は次のように簡単に，高速に実行できる．

$$c^{j-1} = A^j c^j, \quad d^{j-1} = B^j c^j, \tag{5}$$

$$c^j = \{c_0^j, c_1^j, \ldots\}, d^j = \{d_0^j, d_1^j, \ldots\}.$$

ここで A^j, B^j はあらかじめ決まる．

ところで，点列 $\{p_i\}$ を通る対象曲線は次となる．

$$r(u) = \sum_i p_i L_4(u - i), \quad L_4(j) = \delta_{j,0}. \tag{6}$$

重み関数 $L_4(u)$ は基本カーディナルスプラインと呼ばれて理論的には無限個の 3 次 B-スプラインの線形和となる．主要な役割を果たすこの $L_4(u)$ 自身が 3 次の補間スプラインであるのでこれをスプラインウエーブレットで「時間周波数解析」をしてみれば，図 2 のようになる．レベル 0 で $L_4(u)$ を，レベル $-1, -2$ でそれぞれ $g_{-1}(u), g_{-2}(u)$ を表している．縦座標のスケールはそれぞれの成分の様子がよくわかるように個別に設定した．データは 20 区間にわたって入力した他をゼロとしているので，高周波成分の両端で異常がみられる．これを避けるには閉じた曲線として周期的条件を与えるか，端点で多重節点を使って避ける (endpoint-interpolating B-spline wavelets)[3]かである．我々はこれまでにもしばしばもちいてきた，端点を越えて点対称な仮想通過点列が延びているとして端点曲率をゼロにする条件をもちいる．

4. 補間機能を維持したスムージング

位置と周波数の情報を一緒に扱うウエーブレット解析で曲線の通過点位置を調整するためには，線分ごとに 2 進分割したデータを使って，全てのレベルに通過点に対応する情報を残すようにすることである．図 1 の曲線の y 成分についての分解の係数 d^j を図 3 に示す．

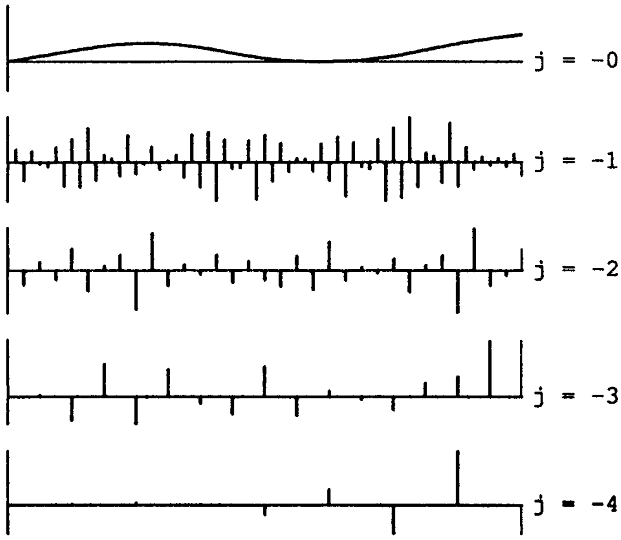

図 3 図 1 の曲線の y 成分の分解

もしある高周波成分を除く，あるいはいずれかの階層成分を除くときには，それに伴う補間点調整を残った成分で，各成分エネルギーに比例しておこなう．

5. おわりに

ユニフォーム 3 次の B-スプライン ウエーブレットを使うことによって 3 次の $C^{[2]}$ 補間曲線を周波数領域を限定した，従って単調で滑らかな曲線として得る方法について述べた．結果の曲線は Subdivision されたものと考えることができ，初期の通過点における滑らかさの不具合を分散されるような形となっている．端点境界条件に点対象な仮想通過点列を導入して周期的条件と同じくらい簡単に取り扱えるようにした．今後は同様の結果をウエーブレットを介さないで直接得ることができる Subdivision 法を導くことである．

参考文献

1) M. Kuroda, F. Kimura and S. Furukawa; Cubic G^3 Interpolating Planar Curves, PG '95 Conf. Proc., World Scientific, (1995), 429.
2) C.K. Chui (桜井 明, 新井 勉); ウエーブレット入門, 東京電機大学出版局, (1993).
3) A. Finkelstein and D.H. Salesin; Multiresolution Curves, Siggraph '94 Conf. Proc., ACM Press, (1994), 261.
4) 橋本 守; B-スプライン曲線の階層化のための再パラメータ化, 情報処理学会第 51 回全国大会, (1995), 2-307.
5) 榊原 進; ウエーブレット ビギナーズガイド, 東京電機大学出版局, (1995).