

抑制結合を持つ1ユニット線形ニューロン群を用いた主成分分析

野田 秀樹[†] ペパー フェルディナンド^{††} 河口 英二[†]

本論文では、入出力ニューロン間のフィードフォワード結合の他に出力ニューロン間に抑制結合を持つ1ユニット線形ニューロン群を用いて、局所的かつ対称な学習則による主成分分析ニューラルネットワークを提案する。ここでは、フィードフォワード結合および抑制結合の重みベクトルの学習則として Yuille らの1ユニット学習則を用いている。ある条件の下で、学習則の平衡点は漸近安定に近い性質を有することを示す。シミュレーション実験によって、提案するニューラルネットワークの動作を確認した。

Principal Component Analysis Using One-unit Linear Neurons with Inhibitory Connections

HIDEKI NODA,[†] FERDINAND PEPPER^{††} and EIJI KAWAGUCHI[†]

This paper proposes a neural network for principal component analysis where the same local learning rule is used for every constituent neuron. The neural network consists of a set of linear neurons which have inhibitory lateral connections with other neurons as well as excitatory feedforward connections with inputs. Yuille's one unit rule is used in learning of weight vectors for feedforward and lateral connections. A stationary solution of the network's learning equation is nearly asymptotic (Poisson stable) under some condition.

1. ま え が き

主成分分析をニューラルネットワークを用いて行う研究が活発に行われている。この方法は、入力サンプルが与えられるたびに少しずつ学習が行われるオンライン処理であり、出力ニューロンの重みベクトルが固有ベクトルに収束するようにネットワークの学習が行われる。このようなオンライン処理は、入力ベクトルの共分散行列の推定を必要とせず、また入力サンプルの統計的性質が緩やかに変化しているような場合にも適応できるという特徴がある。主成分分析ニューラルネットワークは、工学的な利用という観点以外に、生体のニューラルネットワーク情報処理における特徴抽出機能のモデルとなりうるかという観点も重要であると考えられている。

主成分分析ニューラルネットワークの研究は Oja の研究¹⁾ に始まり、Sanger の研究²⁾ によって完成されたといえる。Sanger の提案した学習則は GHA (Generalized Hebbian Algorithm) と呼ばれており、これは、主成分分析を行うことができるニューラルネットワークという点

では、完全なものである。しかし、そのニューラルネットワークが生体の特徴抽出機能のモデルとなりうるかという点では疑問視されている。これは、GHA の学習が局所的でない点 (あるニューロンの重みベクトルの学習に際して他のニューロンの重みベクトルの情報も必要) と非対称 (学習則がニューロンごとに異なる) である点から、生体のニューラルネットワークでの実現可能性が低いことによる。その後、非対称ではあるが局所的な学習則による主成分分析ニューラルネットワークが Kung ら³⁾ によって、局所的ではないが対称な学習則によるニューラルネットワークは、Peper ら⁴⁾ によって提案されている。

本論文では、新たに局所的かつ対称な学習則による主成分分析ニューラルネットワークを提案する*。ニューラルネットワークは、フィードフォワード結合の他に出力ニューロン間に抑制結合を持つ1ユニット線形ニューロン群を用いて構成される。入出力間の重みベクトルの学習則として Yuille らの1ユニット学習則⁶⁾を用いている。提案する主成分分析ニューラルネットワークは、局所的かつ対称な学習則であるため、他のニューラルネットワークに比

[†] 九州工業大学工学部
Faculty of Engineering, Kyushu Institute of Technology
^{††} 郵政省通信総合研究所
Communications Research Laboratory

* Foldiak⁵⁾による局所的で対称な学習則では、重みベクトルは固有ベクトルではなく、固有ベクトルの張る部分空間のある基底ベクトルに収束する。

べて生体で実現できる可能性は高い。また、重みベクトルの大きさの中に固有値の情報を含むため、重要な情報を担わない不必要なニューロンの排除を容易にできる利点もある。

2. 学習則

主成分分析ニューラルネットにおける入力ニューロン数を N 、出力ニューロン数を M とする。入力ベクトルを $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ 、入力と j 番目の出力ニューロン間の結合の重みベクトルを $\mathbf{w}_j = (w_{1j}, w_{2j}, \dots, w_{Nj})^T$ 、他の出力ニューロンから j 番目の出力ニューロンへの抑制性結合の重みベクトルを $\mathbf{v}_j = (v_{1j}, v_{2j}, \dots, v_{jj} = 0, \dots, v_{Mj})^T$ (自己結合はなし) とし、 j 番目の出力ニューロンの出力 y_j は

$$y_j = \mathbf{x}^T \mathbf{w}_j - \mathbf{z}^T \mathbf{v}_j, \quad j = 1, \dots, M \quad (1)$$

で与えられるとする。ただし、 $\mathbf{z} = (\mathbf{w}_1^T \mathbf{x}, \mathbf{w}_2^T \mathbf{x}, \dots, \mathbf{w}_M^T \mathbf{x})^T$ である。各重みベクトル \mathbf{w}_j 、 \mathbf{v}_j の学習は次式で行われるものとする。

$$\Delta \mathbf{w}_j(t) = \gamma_w(t)(y_j(t)\mathbf{x}(t) - |\mathbf{w}_j(t)|^2 \mathbf{w}_j(t)) \quad (2)$$

$$\Delta \mathbf{v}_j(t) = \gamma_v(t)(y_j(t)\mathbf{z}_j(t) - |\mathbf{v}_j(t)|^2 \mathbf{v}_j(t)) \quad (3)$$

ただし、 t は時刻、 \mathbf{z}_j は \mathbf{z} の j 番目の成分のみを 0 としたベクトルであり、また γ_w 、 γ_v はそれぞれ \mathbf{w}_j 、 \mathbf{v}_j に対する学習率である。 \mathbf{z}_j は抑制結合に自己結合がないこと ($v_{jj} = 0$) に対応して用いられている。式 (2) は Yuille らの 1 ユニット学習則である⁶⁾。抑制結合に対しても同様な学習則 (式 (3)) を用いている。式 (1) を式 (2)、(3) に代入して、

$$\Delta \mathbf{w}_j = \gamma_w(\mathbf{x}\mathbf{x}^T \mathbf{w}_j - \mathbf{x}\mathbf{x}^T \mathbf{W}\mathbf{v}_j - |\mathbf{w}_j|^2 \mathbf{w}_j) \quad (4)$$

$$\Delta \mathbf{v}_j = \gamma_v(\mathbf{W}_j^T \mathbf{x}\mathbf{x}^T \mathbf{w}_j - \mathbf{W}_j^T \mathbf{x}\mathbf{x}^T \mathbf{W}\mathbf{v}_j - |\mathbf{v}_j|^2 \mathbf{v}_j) \quad (5)$$

が得られる。ただし、時間変化を表す (t) は簡単のために省略している。ここで、 \mathbf{W} は M 個の重みベクトルを並べて得られる行列 $\mathbf{W} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_M)$ 、 \mathbf{W}_j は \mathbf{W} 中の $\mathbf{w}_j = \mathbf{0}$ とした行列 $\mathbf{W}_j = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_j = \mathbf{0}, \dots, \mathbf{w}_M)$ である。

この学習の振舞いは、学習率等がある緩やかな条件を満足するならば、入力ベクトルの共分散行列を $\mathbf{C} = E[\mathbf{x}\mathbf{x}^T]$ とし、次の微分方程式で記述できることが知られている⁷⁾。

$$\frac{d\mathbf{w}_j}{dt} = \mathbf{C}\mathbf{w}_j - \mathbf{C}\mathbf{W}\mathbf{v}_j - |\mathbf{w}_j|^2 \mathbf{w}_j \quad (6)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_j}{dt} = \mathbf{W}_j^T \mathbf{C}\mathbf{w}_j - \mathbf{W}_j^T \mathbf{C}\mathbf{W}\mathbf{v}_j - |\mathbf{v}_j|^2 \mathbf{v}_j \quad (7)$$

共分散行列 \mathbf{C} の N 個の固有値はすべて正の値とし、その中から大きい固有値 M ($M \leq N$) 個を任意に並べたものを $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$ 、対応する正規直交固有ベクトルを $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_M$ とする。残りの固有値、固有ベクトルを $\lambda_{M+1}, \dots, \lambda_N$ 、 $\mathbf{u}_{M+1}, \dots, \mathbf{u}_N$

とする。 $\bar{\mathbf{w}}_j = \lambda_j^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}_j$ 、 $\bar{\mathbf{v}}_j = \mathbf{0}$ 、 $j = 1, \dots, M$ から構成される行列 $\bar{\mathbf{W}} = (\bar{\mathbf{w}}_1, \bar{\mathbf{w}}_2, \dots, \bar{\mathbf{w}}_M)$ 、 $\bar{\mathbf{V}} = (\bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2, \dots, \bar{\mathbf{v}}_M) = \mathbf{O}$ は、ネットワーク全体の平衡点、すなわち $j = 1, \dots, M$ に対する式 (6)、(7) の学習方程式全体の平衡点となる。その際は $|\bar{\mathbf{w}}_j|^2 = \lambda_j$ となり、固有値も抽出できることになる。その証明は付録 1 に述べている。また、付録 2 に記述しているように、主成分の固有値がある条件を満足するとき、平衡点は漸近安定に近い性質 (これを準漸近安定と呼ぶ) を有する。

3. シミュレーション実験

提案するニューラルネットの動作確認のためには、固有値や固有ベクトルが既知、すなわち共分散行列が既知の入力サンプル (ベクトル) が必要である。ここでは、平均 $\mathbf{0}$ で既知の共分散行列の 6 次元ガウス分布に従う独立なサンプルを用いることとした。実験には、固有値として、2.5、2.0、1.5、1.0、0.7、0.5 を、対応する固有ベクトルとして、それぞれ $\frac{1}{\sqrt{7}}(1, 2, 1, 1, 0, 0)^T$ 、 $\frac{1}{\sqrt{12}}(-1, 1, -1, 0, 3, 0)^T$ 、 $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, -1, 0, 0, 1)^T$ 、 $\frac{1}{\sqrt{4}}(1, -1, 1, 0, 1, 0)^T$ 、 $\frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 0, 1, 0, 0, 2)^T$ 、 $\frac{1}{\sqrt{42}}(1, 2, 1, -6, 0, 0)^T$ を用いた。これらの固有値の値は付録 2 に述べる準漸近安定条件を満足している。

主成分分析ニューラルネットが学習によって主成分を抽出する性能を評価するため、以下の評価尺度 S (これを一致度と呼ぶ) を用いる⁴⁾。これは、真の固有ベクトル \mathbf{u}_i と出力ニューロンの重みベクトル \mathbf{w}_j との方向に関する類似度

$$s_{ij} = \cos^2 \angle(\mathbf{u}_i, \mathbf{w}_j) = \frac{(\mathbf{u}_i, \mathbf{w}_j)^2}{|\mathbf{u}_i|^2 |\mathbf{w}_j|^2} \quad (8)$$

を用いて

$$S = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \max_{\substack{i_k \in \mathcal{I} - \{i_1, \dots, i_{k-1}\} \\ j_k \in \mathcal{J} - \{j_1, \dots, j_{k-1}\}}} s_{i_k j_k} \quad (9)$$

で定義される。式 (9) で、 M は出力ニューロンの数、 \mathcal{I} は主要な (固有値の大きな) M 個の固有ベクトルを表す添え字の集合、 $\mathcal{J} = \{1, \dots, M\}$ である。

出力ニューロン数 $M = 6$ の場合*の結果を、図 1 に示す。これは、学習回数を 10^5 回 (入力サンプル数 10^5) とする実験を 200 回行った平均を示している。学習率は、参考のために行った GHA の場合も含めて、0.01 とした。図 1(a) から、固有ベクトルの抽出性能を表す一致度 (Match Score) S が学習回数と

* M が 6 よりも少ない場合は、固有値の大きい M 個の主成分を抽出できることも確認している。

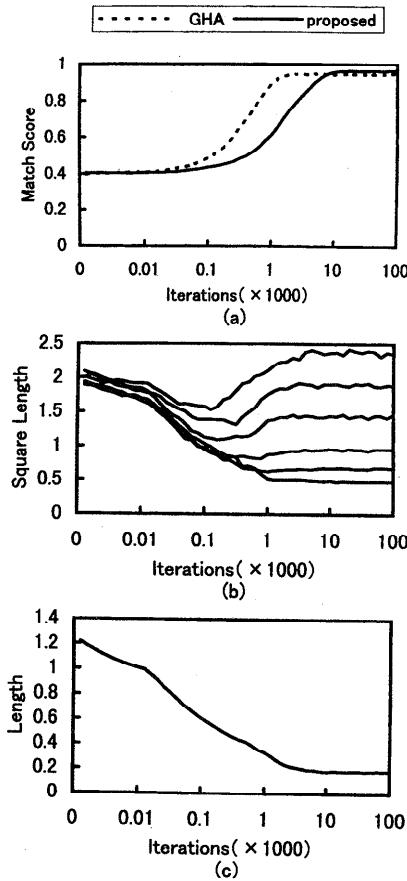


図1 出力ニューロン数6の場合の実験結果：(a)一致度，(b) $|\mathbf{w}_j|^2$ ，(c) $|\mathbf{v}_j|$ の推移

Fig. 1 Simulation results for 6 output neurons: evolution of (a) match score, (b) $|\mathbf{w}_j|^2$, (c) $|\mathbf{v}_j|$.

ともに向上していることが分かる。参考のために代表的な主成分分析ニューラルネットであるGHAの結果も示している☆。図1(b)は、各出力ニューロンのフィードフォワード結合の重みベクトルの大きさの2乗 $|\mathbf{w}_j|^2$ の推移を表す。これから、 $|\mathbf{w}_j|^2$ がほぼ固有値に収束していることが分かる。図1(c)は、各出力ニューロンの抑制結合の重みベクトルの大きさ $|\mathbf{v}_j|$ の推移を表す。各 $|\mathbf{v}_j|$ の推移はほぼ同じであり、ここでは $|\mathbf{v}_j|, j = 1, \dots, M$ の平均を図示している。 $|\mathbf{v}_j|$ は完全に0ではないが小さな値に収束している。

4. むすび

本論文では、フィードフォワード結合の他に出力

☆ 学習の様子は、学習率をはじめとする様々な要因によって変化するため簡単には評価できないが、本実験では、提案するニューラルネットはGHAと比べて学習速度は遅いが、固有ベクトルの抽出精度は高い結果となっている。

ニューロン間に抑制結合を持つ1ユニット線形ニューロン群を用いて、局所的かつ対称な学習則による主成分分析ニューラルネットを新たに提案した。提案したニューラルネットの動作は、シミュレーション実験で確認された。しかし、学習則の平衡点は条件付きの準漸近安定という問題点があり、この解消は今後の課題である。

参考文献

- 1) Oja, E.: A simplified neuron model as a principal component analyzer, *J. Mathematical Biology*, Vol.15, pp.267-273, (1982).
- 2) Sanger, T.D.: Optimal unsupervised learning in a single-layer linear feedforward neural network, *Neural Networks*, Vol.2, pp.459-473, (1989).
- 3) Kung, S.Y. and Diamantaras, K.I.: A neural network learning algorithm for adaptive principal component extraction (APEX), *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech & Signal Process*, pp.861-864, (1990).
- 4) Peper, F. and Noda, H.: A symmetric linear neural network that learns principal components and their variances, *IEEE Trans. Neural Networks*, Vol.7, No.4, pp.1042-1047 (1996).
- 5) Foldiak, P.: Adaptive network for optimal linear feature extraction, *Proc. Int. Joint Conf. Neural Networks*, pp.I-401-I-405 (1989).
- 6) Yuille, A.L., Kammen D.M. and Cohen, D.S.: Quadrature and the development of orientation selective cortical cells by Hebb rules, *Biological Cybernetics*, Vol.61, pp.183-194 (1989).
- 7) Kushner, H.J. and Clark, D.S.: *Stochastic approximation methods for constrained and unconstrained systems*, Springer-Verlag, New York (1978).
- 8) 近藤次郎：数学モデル，p.239，丸善(1976).

付 録

A.1 学習方程式の平衡点

$|\bar{\mathbf{w}}_j|^2 = \lambda_j$, $\bar{\mathbf{v}}_j = \mathbf{0}$ に注意して、

$$\left. \frac{d\mathbf{w}_j}{dt} \right|_{\mathbf{W}=\bar{\mathbf{W}}, \mathbf{V}=\bar{\mathbf{V}}} = \mathbf{C}\bar{\mathbf{w}}_j - |\bar{\mathbf{w}}_j|^2 \bar{\mathbf{w}}_j = \mathbf{0} \tag{10}$$

となる。 $i \neq j$ の場合に $\bar{\mathbf{w}}_i^T \bar{\mathbf{w}}_j = 0$, $\bar{\mathbf{v}}_j = \mathbf{0}$ より、

$$\left. \frac{d\mathbf{v}_j}{dt} \right|_{\mathbf{W}=\bar{\mathbf{W}}, \mathbf{V}=\bar{\mathbf{V}}} = \bar{\mathbf{W}}_j^T \mathbf{C}\bar{\mathbf{w}}_j = \mathbf{0} \tag{11}$$

となる。

A.2 平衡点の漸近安定性に関する考察

平衡点の漸近安定性を考察するために、 \mathbf{W} , \mathbf{V} の平

平衡点 $\bar{\mathbf{W}}, \bar{\mathbf{V}}$ からの微小なずれ $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_M)$, $\mathbf{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_M)$ の力学系を調べる.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_j}{dt} &= \left. \frac{d\mathbf{w}_j}{dt} \right|_{\mathbf{W}=\bar{\mathbf{W}}+\mathbf{E}, \mathbf{V}=\bar{\mathbf{V}}+\mathbf{F}} \\ &= \mathbf{C}(\bar{\mathbf{w}}_j + \mathbf{e}_j) - \mathbf{C}(\bar{\mathbf{W}} + \mathbf{E})(\bar{\mathbf{v}}_j + \mathbf{f}_j) \\ &\quad - (\bar{\mathbf{w}}_j + \mathbf{e}_j)^T (\bar{\mathbf{w}}_j + \mathbf{e}_j) (\bar{\mathbf{w}}_j + \mathbf{e}_j) \quad (12) \\ &\approx \mathbf{C}\mathbf{e}_j - |\bar{\mathbf{w}}_j|^2 \mathbf{e}_j - 2(\bar{\mathbf{w}}_j^T \mathbf{e}_j) \bar{\mathbf{w}}_j - \mathbf{C}\bar{\mathbf{W}}\mathbf{f}_j \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{f}_j}{dt} &= \left. \frac{d\mathbf{v}_j}{dt} \right|_{\mathbf{W}=\bar{\mathbf{W}}+\mathbf{E}, \mathbf{V}=\bar{\mathbf{V}}+\mathbf{F}} \\ &= (\bar{\mathbf{W}}_j + \mathbf{E}_j)^T \mathbf{C}(\bar{\mathbf{w}}_j + \mathbf{e}_j) \\ &\quad - (\bar{\mathbf{W}}_j + \mathbf{E}_j)^T \mathbf{C}(\bar{\mathbf{W}} + \mathbf{E})(\bar{\mathbf{v}}_j + \mathbf{f}_j) \\ &\quad - (\bar{\mathbf{v}}_j + \mathbf{f}_j)^T (\bar{\mathbf{v}}_j + \mathbf{f}_j) (\bar{\mathbf{v}}_j + \mathbf{f}_j) \quad (14) \\ &\approx \bar{\mathbf{W}}_j^T \mathbf{C}\mathbf{e}_j + \mathbf{E}_j^T \mathbf{C}\bar{\mathbf{w}}_j - \bar{\mathbf{W}}_j^T \mathbf{C}\bar{\mathbf{W}}\mathbf{f}_j \quad (15) \end{aligned}$$

ここで、式(13), (15)は、それぞれ式(12), (14)で \mathbf{E}, \mathbf{F} のノルム $\|\mathbf{E}\|, \|\mathbf{F}\|$ は微量として1次の項のみを考慮した線形近似式である. \mathbf{E}_j は \mathbf{E} 中で $\mathbf{e}_j = \mathbf{0}$ とした行列である ($\mathbf{E}_j = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_j = \mathbf{0}, \dots, \mathbf{e}_M)$). また、抑制結合には自己結合はないとしているため、 $\mathbf{f}_j = (f_{1j}, f_{2j}, \dots, f_{jj} = 0, \dots, f_{Mj})^T$ となることに注意を要する.

$\|\mathbf{e}_j\|$ の振舞いを調べるために、固有ベクトル $\mathbf{u}_r (r = 1, \dots, N)$ への射影成分のそれを調べる.

$$\begin{aligned} \frac{d(\mathbf{u}_r^T \mathbf{e}_j)}{dt} &\approx \mathbf{u}_r^T \mathbf{C}\mathbf{e}_j - |\bar{\mathbf{w}}_j|^2 (\mathbf{u}_r^T \mathbf{e}_j) \\ &\quad - 2(\bar{\mathbf{w}}_j^T \mathbf{e}_j) (\mathbf{u}_r^T \bar{\mathbf{w}}_j) - \mathbf{u}_r^T \mathbf{C}\bar{\mathbf{W}}\mathbf{f}_j \quad (16) \end{aligned}$$

式(16)は、 $r > M$ の場合、固有ベクトルの直交性に注意して

$$\frac{d(\mathbf{u}_r^T \mathbf{e}_j)}{dt} \approx (\lambda_r - \lambda_j) (\mathbf{u}_r^T \mathbf{e}_j) \quad (17)$$

となる. $r > M \geq j$ のとき $\lambda_j > \lambda_r$ より、 $\mathbf{u}_r^T \mathbf{e}_j$ は $t \rightarrow \infty$ で0になることが分かる.

式(16)は、 $r \leq M$ の場合は

$$\begin{aligned} \frac{d(\mathbf{u}_r^T \mathbf{e}_j)}{dt} &\approx \lambda_r (\mathbf{u}_r^T \mathbf{e}_j) - \lambda_j (\mathbf{u}_r^T \mathbf{e}_j) \\ &\quad - 2\lambda_j (\mathbf{u}_j^T \mathbf{e}_j) (\mathbf{u}_r^T \mathbf{u}_j) - \lambda_r^{\frac{3}{2}} f_{rj} \quad (18) \end{aligned}$$

と書ける. $r = j$ の場合と $r \neq j$ の場合に分けて考える.

$r = j$ の場合は $f_{jj} = 0$ に注意して

$$\frac{d(\mathbf{u}_j^T \mathbf{e}_j)}{dt} \approx -2\lambda_j (\mathbf{u}_j^T \mathbf{e}_j) \quad (19)$$

となり $\mathbf{u}_j^T \mathbf{e}_j$ は $t \rightarrow \infty$ で0になることが分かる.

$r \neq j$ の場合は、

$$\frac{d(\mathbf{u}_r^T \mathbf{e}_j)}{dt} \approx (\lambda_r - \lambda_j) (\mathbf{u}_r^T \mathbf{e}_j) - \lambda_r^{\frac{3}{2}} f_{rj} \quad (20)$$

となり、 f_{rj} との結合があるため df_{rj}/dt を式(15)より求める.

$$\frac{df_{rj}}{dt} \approx \lambda_r^{\frac{3}{2}} (\mathbf{u}_r^T \mathbf{e}_j) + \lambda_j^{\frac{3}{2}} (\mathbf{u}_j^T \mathbf{e}_r) - \lambda_r^2 f_{rj} \quad (21)$$

これから $\mathbf{u}_j^T \mathbf{e}_r$ の微分方程式

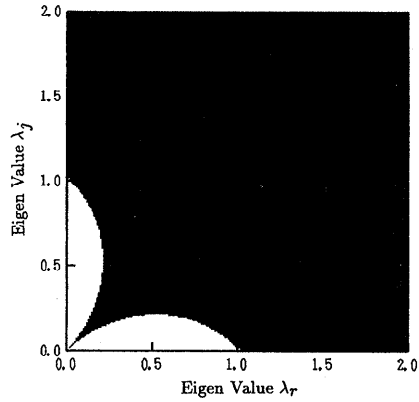


図2 準漸近安定 (ポアソン安定) 領域
Fig. 2 Poisson stable region.

$$\frac{d(\mathbf{u}_j^T \mathbf{e}_r)}{dt} \approx (\lambda_j - \lambda_r) (\mathbf{u}_j^T \mathbf{e}_r) - \lambda_j^{\frac{3}{2}} f_{jr} \quad (22)$$

さらに、 f_{jr} の微分方程式

$$\frac{df_{jr}}{dt} \approx \lambda_j^{\frac{3}{2}} (\mathbf{u}_j^T \mathbf{e}_r) + \lambda_r^{\frac{3}{2}} (\mathbf{u}_r^T \mathbf{e}_j) - \lambda_j^2 f_{jr} \quad (23)$$

を考慮し、結局次の4元連立微分方程式で記述される力学系の考察に到達する.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_r^T \mathbf{e}_j \\ f_{rj} \\ \mathbf{u}_j^T \mathbf{e}_r \\ f_{jr} \end{pmatrix} \approx \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_r^T \mathbf{e}_j \\ f_{rj} \\ \mathbf{u}_j^T \mathbf{e}_r \\ f_{jr} \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_r - \lambda_j & -\lambda_r^{\frac{3}{2}} & 0 & 0 \\ \lambda_r^{\frac{3}{2}} & -\lambda_r^2 & \lambda_j^{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j - \lambda_r & -\lambda_j^{\frac{3}{2}} \\ \lambda_r^{\frac{3}{2}} & 0 & \lambda_j^{\frac{3}{2}} & -\lambda_j^2 \end{pmatrix} \quad (25)$$

行列 \mathbf{A} の固有値 λ を求めるための特性方程式は

$$\lambda(\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0 \quad (26)$$

$$a = \lambda_r^2 + \lambda_j^2 \quad (27)$$

$$\begin{aligned} b &= \lambda_r (\lambda_r^2 - \lambda_r + \lambda_j) + \lambda_j (\lambda_j^2 - \lambda_j + \lambda_r) \\ &\quad + \lambda_r^2 \lambda_j^2 \quad (28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c &= \lambda_r \lambda_j \{ \lambda_j (\lambda_r^2 - \lambda_r + \lambda_j) \\ &\quad + \lambda_r (\lambda_j^2 - \lambda_j + \lambda_r) \} \quad (29) \end{aligned}$$

となる. Routh の判定法によると、 $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ の3根の実部が負となる必要十分条件は $a, c > 0$ かつ $ab > c$ である⁸⁾. この条件を満足する領域を数値計算で求めてみると、図2の黒色の領域となる. しかし、式(26)の1根が $\lambda = 0$ であるため、 $t \rightarrow \infty$ で $(\mathbf{u}_r^T \mathbf{e}_j, f_{rj}, \mathbf{u}_j^T \mathbf{e}_r, f_{jr})^T = \mathbf{0}$ とはならず、平衡点からの微小なずれは一部そのまま残る. したがって、平衡点は前述の条件下で漸近安定に近い性質を持つ (ポアソン安定) と考えられる.

(平成10年3月12日受付)
(平成10年9月7日採録)