

代用電荷法による実関数の近似

岡野 大[†] 緒方 秀教^{††}
天野 要[†] 井上 哲男^{†††}

本論文では、有界閉区間で定義された実関数 $f(x)$ に対し、Joukowski 変換と代用電荷法を組み合わせた関数近似法を提案する。

A Method of Approximating Real Functions Using the Charge Simulation Method

DAI OKANO,[†] HIDENORI OGATA,^{††} KANAME AMANO[†]
and TETSUO INOUE^{†††}

In this note, we present a method of approximating the real function $f(x)$ analytic on a bounded closed interval by applying the charge simulation method and the Joukowski transformation.

1. 代用電荷法に基づく近似関数

平面領域における Laplace 方程式の境界値問題に対する数値解法として、代用電荷法^{*}が広く用いられている⁵⁾。円板領域における境界値問題に対する代用電荷法に関しては、Katsurada, Okamoto²⁾が精密な誤差解析を行っており、拘束点・電荷点を同心円の等分点に選んだ場合、計算の手間に対し誤差が指数関数的に減衰することを示している。本論文では、この円板領域における代用電荷法を実関数近似に応用する方法を提案する。

本論文では、2次元実平面 \mathbf{R}^2 を1次元複素平面 \mathbf{C} と同一視し、円板領域を単位円板 $|w| < 1$ とする。領域 $|w| < 1$ における代用電荷法の本質は、円板内における調和関数 $-(1/2\pi) \log |w - Re^{i2\pi(j-1)/n}|$ ($R > 1$, $j = 1, 2, \dots, n$) の線形結合による円周上の関数近似である。さらに、その関数近似の収束性はもとの関数の

(円板近傍でなく)円周近傍における調和性によって、これを具体的に表すと、次の定理のようになる。

定理1 円環領域

$A_\rho = \{ w \in \mathbf{C} \mid \rho^{-1} \leq |w| \leq \rho \}$ ($\rho > 1$)
における調和関数 $u(w)$ に対し、拘束点を

$$e^{i2\pi(j-1)/n} \quad (n \text{ は正の整数, } j = 1, 2, \dots, n),$$

電荷点を

$$Re^{i2\pi(k-1)/n} \quad (R > 1, k = 1, 2, \dots, n)$$

とする代用電荷法を適用して得られる近似関数を $u_n(w)$ とする。このとき、単位円 $|w| = 1$ における近似誤差 $\sup_{|w|=1} |u(w) - u_n(w)|$ に対し、次の不等式が成立する。

$$\sup_{|w|=1} |u(w) - u_n(w)| \leq A \sup_{w \in \partial A_\rho} |u(w)| \times \begin{cases} R^{-n} & (R^2 \leq \rho) \\ \rho^{-n/2} & (R^2 > \rho). \end{cases}$$

ここで A は $u(w)$, n によらない正の定数である。□ (証明) 定理1の結果は、室田⁴⁾による代用電荷法の不変スキームの収束定理の仮定「 $u(w)$ が円板領域 $|w| \leq \rho$ ($\rho > 1$) で調和である」を弱めたものである。

[†] 愛媛大学工学部情報工学科

Department of Computer Science, Faculty of Engineering, Ehime University

^{††} 東京大学大学院工学系研究科物理工学専攻

Department of Applied Physics, Graduate School of Engineering, The University of Tokyo

^{†††} 神戸商船大学応用数学教室

Department of Applied Mathematics, Kobe Mercantile Marine College

^{*} 本論文では代用電荷法として室田⁴⁾によって提案された「不変スキーム」を用いることにする。

室田の証明は、非常に簡単な概略を示すのみだが、そこに指摘されているように、代用電荷法のいわゆる「通常スキーム」に関する Katsurada, Okamoto²⁾ による収束定理の証明とほとんど同じである。さらに、その証明をよくみれば、収束速度は周期関数 $u(e^{i\theta})$ の Fourier 展開の収束速度で決まることが分かる。したがって、不変スキームの収束定理の仮定として、 $u(w)$ は円板領域 $|w| \leq \rho$ でなく円環領域 A_ρ で調和であれば十分であることが分かる。■

上に記したことから、実軸上の区間を円周に写す適切な等角写像を用いれば実関数近似に代用電荷法を応用できることが予測される。

本論文では、一般性を失うことなく、実軸上の区間を $I = [-1, +1]$ にとることにする。この場合、区間 I を単位円周 $|w| = 1$ に写す等角写像として、Joukowski 変換 $z = (w + w^{-1})/2$ がよく知られている。したがって、 $f(x)$ を I 近傍で解析的な実関数とすると、これに Joukowski 変換を施した関数 $g(w) = f((w + w^{-1})/2)$ は単位円周 $|w| = 1$ 近傍で解析的、したがって、 $u(w) = \text{Re}\{g(w)\}$ は $|w| = 1$ 近傍で調和関数となる。

とくに、 w 平面における単位円周 $|w| = 1$ (z 平面における実軸上の閉区間 I) 上では $g(w) = f(z)$ は実数値、すなわち、 $u(w) = f(z)$ となる。したがって、 $u(w)$ に対し単位円板における代用電荷法を適用して得る近似関数 $u_n(w)$ は、 $|w| = 1$ 、すなわち、 z 平面の閉区間 I 上で $f(x)$ に対する関数近似を与えると予測される。

具体的には次のようにして代用電荷法による近似関数を構成する。 N を正の整数、 $\omega = \exp(i\pi/N)$ とし、単位円 $|w| = 1$ 上に $2N$ 個の等間隔の拘束点 ω^{j-1} ($j = 1, 2, \dots, 2N$)、円 $|w| = R$ ($R > 1$) 上に $2N$ 個の等間隔の電荷点 $R\omega^{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots, 2N$) を置く。関数 $g(w) = f((w + w^{-1})/2)$ に対し代用電荷法(室田⁴⁾の不変スキーム)を適用し、その解を

$$u_{2N}(w) = Q_0 - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{2N} Q_k \log |w - R\omega^{k-1}|. \quad (1)$$

とする、ただし Q_j ($j = 0, 1, 2, \dots, 2N$) は、拘束条件 $u_{2N}(\omega^{j-1}) = u(\omega^{j-1})$ ($j = 1, 2, \dots, 2N$)、すなわち、

$$\begin{aligned} Q_0 - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{2N} Q_k \log |\omega^{j-1} - R\omega^{k-1}| \\ = u(\omega^{j-1}) = f\left(\cos \frac{\pi}{N}(j-1)\right) \\ (j = 1, 2, \dots, 2N), \end{aligned} \quad (2)$$

および、 $u_{2N}(w)$ の不変性から要請される条件⁴⁾

$$\sum_{k=1}^{2N} Q_k = 0 \quad (3)$$

からなる連立1次方程式(2)、(3)を解いて得られる。

ところが、 Q_k の値に関して次の定理が成り立つ。

定理2 連立1次方程式(2)、(3)の解 Q_k は

$$Q_k = Q_{2N-k+2} \quad (k = 2, 3, \dots, N) \quad (4)$$

を満たす。□

(証明) $j, k = 1, 2, \dots, 2N$ に対し、

$$\begin{aligned} |\omega^{2N-j+1} - R\omega^{2N-k+1}| &= |\omega^{j-1} - R\omega^{k-1}| \\ |\omega^{2N-j+1} - R\omega^{k-1}| &= |\omega^{j-1} - R\omega^{2N-k+1}| \\ f\left(\cos \frac{\pi}{N}(2N-j+1)\right) &= f\left(\cos \frac{\pi}{N}(j-1)\right) \end{aligned}$$

が成り立つから、(2)の第 j 行 - 第 $(2N-j+2)$ 行 ($j = 1, 2, \dots, 2N$) より、

$$\begin{aligned} (Q_0 - Q_0) \\ - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{2N} (Q_k - Q_{2N-k+2}) \log |\omega^{j-1} - R\omega^{k-1}| \\ = 0 \end{aligned}$$

を得る、ただし、 $Q_{2N+1} = Q_1$ である。

したがって、 $Q'_0 = Q_0 - Q_0$ 、 $Q'_k = Q_k - Q_{2N-k+2}$ ($k = 1, 2, \dots, 2N$) と置くと、

$$\begin{aligned} Q'_0 - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{2N} Q'_k \log |\omega^{j-1} - R\omega^{k-1}| \\ = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 2N), \end{aligned} \quad (5)$$

および、式(3)より、

$$\sum_{k=1}^{2N} Q'_k = 0 \quad (6)$$

が成り立つ。式(5)、(6)を Q'_k ($k = 0, 1, \dots, 2N$) の連立方程式と見なすと、定理2.3⁴⁾より係数行列は正則であるから、 $Q'_k = 0$ ($k = 0, 1, \dots, 2N$) を得る。■

定理2より、未知係数は $Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_{N+1}$ の $(N+2)$ 個のみとなり、解くべき連立1次方程式は次のとおりである。

$$\begin{aligned}
 & Q_0 - \frac{1}{2\pi} Q_1 \log |\omega^{j-1} - R| \\
 & - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=2}^N Q_k \{h_k^{(N)}(\omega^{j-1}) + h_{2-k}^{(N)}(\omega^{j-1})\} \\
 & - \frac{1}{2\pi} Q_{N+1} \log |\omega^{j-1} + R| \\
 & = f\left(\cos \frac{\pi}{N}(j-1)\right) \\
 & (j = 1, 2, \dots, N+1), \tag{7}
 \end{aligned}$$

$$Q_1 + 2 \sum_{k=2}^N Q_k + Q_{N+1} = 0. \tag{8}$$

ただし、 $h_k^{(N)}(w) = \log |w - R\omega^{k-1}|$ ($k = 2, \dots, N$) である。この連立1次方程式を解いて得られる Q_k ($k = 0, 1, 2, \dots, N+1$) を用いて、 $u_{2N}(w)$ は

$$\begin{aligned}
 u_N(w) &= Q_0 - \frac{1}{2\pi} Q_1 \log |w - R| \\
 & - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=2}^N Q_k \{h_k^{(N)}(w) + h_{2-k}^{(N)}(w)\} \\
 & - \frac{1}{2\pi} Q_{N+1} \log |w + R| \tag{9}
 \end{aligned}$$

と表される。単位円 $w = e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) 上では $u_N(e^{i\theta}) \approx u(e^{i\theta}) = f(\cos \theta)$ であるから、結局もとの実関数 $f(x)$ に対し次の近似関数 $f_N(x)$ を得る。

$$\begin{aligned}
 f_N(x) &\equiv u_N(e^{i\theta}) \\
 &= Q_0 - \frac{1}{2\pi} Q_1 \log |e^{i\theta} - R| \\
 & - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=2}^N Q_k \{h_k^{(N)}(e^{i\theta}) + h_{2-k}^{(N)}(e^{i\theta})\} \\
 & - \frac{1}{2\pi} Q_{N+1} \log |e^{i\theta} + R| \tag{10}
 \end{aligned}$$

ただし $x = \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) である。

注意 1 代用電荷法による実関数の近似に関しては、Inoue¹⁾ による研究もある。ところがこの方法は、複素平面に埋め込んだ実関数に対し変数変換を施さずに直接代用電荷法を適用するというものである。この方法に対しては、近似関数の収束が数学的に保証されていない。

2. 誤差評価

前章で導出した近似関数 $f_N(x)$ の誤差に対し次の定理が成り立つ。

定理 3 ρ は $\rho > 1$ なる定数であり、 $f(z)$ は楕円

$$E_\rho : \left\{ \frac{2(\operatorname{Re} z)}{\rho + \rho^{-1}} \right\}^2 + \left\{ \frac{2(\operatorname{Im} z)}{\rho - \rho^{-1}} \right\}^2 = 1$$

およびその内部を含む領域で正則であるとする。このとき、関数近似 $f(x) \approx f_N(x)$ ($-1 \leq x \leq 1$) に対し

次の誤差評価が成り立つ。

$$\begin{aligned}
 & \sup_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - f_N(x)| \\
 & \leq C \max_{z \in E_\rho} |f(z)| \times \begin{cases} R^{-2N} & (R^2 \leq \rho), \\ \rho^{-N} & (R^2 > \rho). \end{cases}
 \end{aligned}$$

ここで C は N によらない正の定数である。 □

上の定理より、実軸上の区間 $[-1, +1]$ 近傍で正則な関数 $f(z)$ に対して、関数近似 $f(x) \approx f_N(x)$ ($-1 \leq x \leq +1$) の誤差は指数関数的に減衰することがいえる。

(証明) 定理の条件より、 $u(w) = \operatorname{Re}\{f(z)\}$ は円環領域 A_ρ で調和関数である。したがって、定理 1 より定理の結論を得る。 ■

3. 数値実験

$f(x) = \arctan x$ に対し、本論文で提案した方法および Chebyshev 補間³⁾ を用いて関数近似を行い、標本点数を増やしていったときの誤差の減衰の仕方を調べた。その結果を図 1 に示してある。数値実験に用いた計算機は Sparc SPX、使用言語は Sun Fortran であり、計算はすべて倍精度で行った。

この場合、関数 $f(z)$ は $z = \pm i$ に特異点を持つので、 $(\rho - \rho^{-1})/2 \approx 1$ 、すなわち、 $\rho \approx 1 + \sqrt{2} = 2.414\dots$ ととることができる。図 1 より、関数近似 $f(x) \approx f_N(x)$ および Chebyshev 補間の誤差は標本点数を増やしていくに従い指数関数的に減衰していることが分かる。

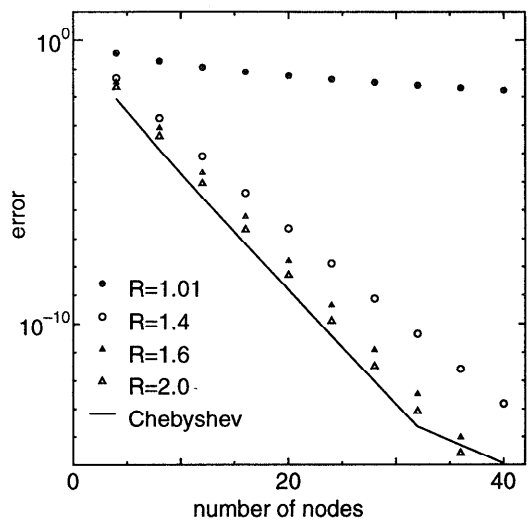


図 1 $f(x) = \arctan x$ に対する関数近似 $f(x) \approx f_N(x)$ および Chebyshev 補間の誤差の振舞い
Fig. 1 The performances of the functional approximation $f(x) \approx f_N(x)$ and the Chebyshev interpolation for the function $f(x) = \arctan x$.

表1 $f(x) = \arctan x$ に対する関数近似 $f(x) \approx f_N(x)$ および Chebyshev 補間に対する実験および理論誤差評価
 Table 1 The experimental and theoretical error estimates of the functional approximation $f(x) \approx f_N(x)$ and the Chebyshev interpolation for the function $f(x) = \arctan x$.

		実験	理論
本論文の 方法	$R = 1.01$	$O[(1.08)^{-N}]$	$O[(1.02)^{-N}]$
	$R = 1.4$	$O[(2.07)^{-N}]$	$O[(1.96)^{-N}]$
	$R = 1.6$	$O[(2.46)^{-N}]$	$O[(2.41)^{-N}]$
	$R = 2.0$	$O[(2.53)^{-N}]$	$O[(2.41)^{-N}]$
Chebyshev		$O[(2.48)^{-N}]$	$O[(2.41)^{-N}]$

とくに $R = 1.6, 2.0$ の場合、誤差の減衰の速さは Chebyshev 補間とほぼ同程度であることが観測される。

定理 3 より、関数近似 (10) の誤差は $O(R^{-2N})$ ($R^2 \leq \rho$ の場合)、 $O(\rho^{-N}) \approx O((2.414)^{-N})$ ($R^2 > \rho$ の場合) のオーダーで減衰すると予測できる。一方、Chebyshev 補間の誤差は、標本点数 N に対し $O(\rho^{-N}) \approx O((2.414)^{-N})$ で減衰することが分かっている。したがって、理論的には関数近似 $f(x) \approx f_N(x)$ の誤差は $R^2 > \rho$, すなわち R がほぼ $\sqrt{1 + \sqrt{2}} = 1.554\dots$ 以上の値の場合 Chebyshev 補間と同じオーダーであることがいえる。

図 1 の実験結果から見積もった誤差のオーダーと、上の理論誤差評価から見積もった誤差のオーダーを表 1 に記した。表 1 より、数値実験結果は理論誤差評価とよく符合していることが分かる。

4. まとめ

代用電荷法と Joukowski 変換を組み合わせた実関数近似は、有界閉区間を含む複素領域で正則な関数に対しきわめて有効であることが、理論誤差解析および数値実験によって示された。今後の課題として、本論文で提案した関数近似の実際の科学技術計算へ応用が残されている。

参考文献

- 1) Inoue, T.: The Interpolating Approximation of Smooth Functions on an Interval and by Harmonic Functions, *Trans. Inform. Process. Soc. Japan*, Vol.38, No.8, pp.1659-1661 (1997).
- 2) Katsurada, M. and Okamoto, H.: A Mathematical Study of the Charge Simulation Method I, *J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. IA*, Vol.35, No.3, pp.507-518 (1988).
- 3) 森 正武: 数値解析, 共立出版 (1973).

4) 室田一雄: 代用電荷法におけるスキームの「不変性」について, 情報処理学会論文誌, Vol.34, No.3, pp.533-535 (1993).

5) 岡本 久, 桂田祐史: ポテンシャル問題の高速解法, 応用数理, Vol.2, No.3, pp.2-20 (1992).

(平成 1998 年 8 月 4 日受付)

(平成 1998 年 10 月 2 日採録)



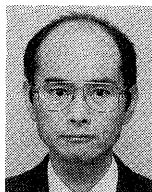
岡野 大 (正会員)

1968 年生。1992 年東京大学工学部物理工学科卒業。1995 年同大学大学院工学系研究科物理工学専攻修士課程修了。修士 (工学)。現在、愛媛大学工学部情報工学科助手。研究分野は数値解析。日本応用数理学会会員。



緒方 秀教 (正会員)

1967 年生。1990 年東京大学工学部物理工学科卒業。1992 年同大学大学院工学系研究科物理工学専攻修士課程修了。博士 (工学)。現在、同大学大学院工学系研究科物理工学専攻助手。研究分野は数値解析。日本応用数理学会 1998 年度論文賞受賞。日本応用数理学会会員。



天野 要 (正会員)

1948 年生。1971 年京都大学工学部電子工学科卒業。1978 年北海道大学大学院工学研究科博士課程電気工学専攻修了。工学博士。現在、愛媛大学工学部情報工学科教授。研究分野は数値解析と数理情報科学。情報処理学会創立 30 周年記念論文賞、日本応用数理学会 1996 年度論文賞受賞。日本数学会、日本応用数理学会、電子情報通信学会、日本心理学会、ACM 各会員。



井上 哲男 (正会員)

1938 年生。1961 年神戸大学教育学部数学科卒業。理学部数学専攻科進学。博士 (理学)。現在、神戸商船大学商船学部教授。研究分野は複素数値解析, 近似理論, 複素変分法, 擬等角写像論。日本数学会, アメリカ数学会, SIAM 各会員。