マルコフ参照列による LRU スタックの状態解析

2U−3

田中 淳裕　紀 一誠
E-mail {omochi,kino}@sbl.cl.nec.co.jp
NEC C&C 研究所

1 はじめに

メモリアクセス速度はプログラムの実行速度に大きな影響を与えるため，仮想記憶やキャッシュの置き換えアルゴリズムとして LRU(Least Recently Used) や LFU(Least Frequently Used) やそれらを組み合わせたものが『尤もらしい』として良く使われている．それらの性能は，主にシミュレーションによって確認されているが，数学的に明確になっているわけではない．

我々は，メモリ参照列がマルコフ連鎖である時という仮定のもとで，LRU スタックの定常状態分布を計算するアルゴリズムを開発している [1]．本稿では，このアルゴリズムに基づき LRU スタックの状態確率を計算した例を示し，今までに提案されている独立参照モデル (IRM) や単純 LRU モデル (SLRUM)[2] との相違を述べる．

2 モデルの概要

問題設定

プログラムが時刻 k(離散時間) に参照するメモリアドレスを r_k と標記し，プログラムが参照する全アドレス領域を $I_M=\{1,2,\cdots,M\}$ とする．また，I_M の要素を並び換えて得られる全ての順列を σ_M と表記する．

このとき，アドレス参照列がマルコフ連鎖であると仮定する．すなわち，次の式が成り立つような，遷移確率行列 $P=\{p_{ij}\}_{1\le i,j\le M}$ の存在を仮定する．
$Pr[r_k=j]=\sum_{i\in M} p_{ij}\ Pr[r_{k-1}=i],\ \forall j\in I_M$.

上記のような設定のもとで，LRU スタックの状態遷移はマルコフ連鎖で記述できる．以下ではこれを簡単に説明する．詳細は文献 [1] に譲る．

LRU スタックの状態遷移

時刻 k における長さ $m(\le M)$ の LRU スタックの状態を $S_m(k)=<a_1,a_2,\cdots,a_m>_m$ と書く (ただし，$a_i\in I_M$，$i\ne j\Rightarrow a_i\ne a_j$)．$a_1$ がスタックの先頭要素であり，a_i がスタックの i 番目の要素である．このとき LRU スタックの状態遷移に関して，以下のような平衡方程式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&Pr[S_m(k)=<a_1,a_2,\cdots,a_m>_m]=\\
&\quad Pr[S_m(k-1)=<a_1,a_2,\cdots,a_m>_m]\ p_{a_1a_1}+\\
&\quad \textstyle\sum_{s\in\nu} Pr[S_m(k-1)=s]\ p_{a_2a_1}+\\
&\quad Pr[S_{m-1}(k-1)=<a_2,a_3,\cdots,a_m>_{m-1}]\ p_{a_2a_1}
\end{aligned}
$$

ここで，ν は 1 ステップで状態 $<a_1,a_2,\cdots,a_m>_m$ に遷移する状態の集合 (それ自身は除く) であり，次のように書ける．

$$\{<a_2,a_3,\cdots,\overset{i\text{番目}}{\overset{\vee}{a_1}},\cdots,a_m>_m \mid 2\le i\le m-1\}$$

上記平衡方程式を解いてスタックサイズ m の定常状態確率を求める手続きは，下記の通り．

1. 最初に，サイズ $m-1$ の定常状態確率を求め，
2. 次に，サイズ m のスタック状態確率に関して連立方程式を解く．

ただし，2の手続きは連立方程式のサイズを小さくするための工夫が必要であり，それほど単純ではない [1]．

$\delta(k)$ を，時刻 k での参照 r_k が存在する LRU スタック上での位置を表す確率変数とすると，$\delta(k)$ の定常状態確率は次の式で表す事ができる．

$$Pr[\delta=j]=\sum_{a\in\sigma_M} p_{a_1a_j} Pr[<a_1,a_2,\cdots,a_j,\cdots,a_M>]$$

これは，スタック距離 (参照) 確率 (SDP: Stack Distance Probability) [2] と呼ばれるものに相当する．

従って，サイズ $m(\le M)$ の LRU スタックのヒット率 $h(m)$ は次の式で表される．
$h(m)=\sum_{j\ge m} Pr[\delta=j]$

3 具体例

簡単のために，以下ではプログラムが参照する全アドレス数を 7 と仮定して議論を進める ($M=7$)．

この節では，列和が 1.0 である遷移確率行列を考える事により，定常状態における各アドレスへの参照確率が等しい (すなわち，参照確率は 1/7) が，スタック距離確率 (SDP) が大きく異なる例を取り上げる．

例 1. ループ構造を持つ場合　遷移確率行列 P を以下のように作る事により，状態遷移にループ構造を持つマルコフ連鎖を構成することができる．

$$
P=\begin{bmatrix}
\varepsilon & 1-\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \varepsilon & 1-\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \varepsilon & 1-\varepsilon & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \varepsilon & 1-\varepsilon & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 1-\varepsilon & 0\\
\frac{-\varepsilon}{2}+p & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 1-\frac{\varepsilon}{2}-p\\
1-\frac{\varepsilon}{2}-p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\varepsilon}{2}+p
\end{bmatrix}
$$

SDP はパラメータ p，ε を用いて表 1 のように表される．また，ε，p に具体的な値を入れて計算した SDP の値を $Pr[\delta]$ を図 1 に示す．

An Analysis of LRU Stack State with Markov Reference Strings
Atsuhiro Tanaka, and Issei Kino
NEC C&C Research Laboratories

表1 : StackDistanceProbability

$$
\begin{aligned}
P(\delta=1) &= \tfrac{13}{14}\varepsilon + \tfrac{1}{7}p \\
P(\delta=2,3,4,5) &= 0 \\
P(\delta=6) &= \tfrac{3}{7}(2p-\varepsilon) \\
P(\delta=7) &= \tfrac{1}{2}(2-\varepsilon-2p)
\end{aligned}
$$

例 2. 近傍参照確率が大きい場合　一回の遷移で近傍を参照する確率の大きな遷移確率行列を，以下のような手続きで構成することができる．

1. $i = 0,1,2,3$ に対して，$q_i = p(1-p)^i$ (パラメータ p の幾何分布) を定義する．
2. 次に，q_i を用いて $p_i = \frac{q_i}{q_0+2(q_1+q_2+q_3)}$ を定義する．これにより $p_3+p_2+p_1+p_0+p_1+p_2+p_3 = 1.0$ が成り立つ (行和・列和を 1.0 とできる)．
3. 次のように遷移確率行列を構成する．

$$
\begin{bmatrix}
p_0+p_1 & p_1+p_2 & p_2+p_3 & p_3 & 0 & 0 & 0 \\
p_1+p_2 & p_0+p_3 & p_1 & p_2 & p_3 & 0 & 0 \\
p_2+p_3 & p_1 & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & 0 \\
p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\
0 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & p_1 & p_2+p_3 \\
0 & 0 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0+p_3 & p_1+p_2 \\
0 & 0 & 0 & p_3 & p_2+p_3 & p_1+p_2 & p_0+p_1
\end{bmatrix}
$$

SDP の値は表 2，図 2 のようになる．

表 2: Stack Distance Probability

	Stack Distance(δ)						
p	1	2	3	4	5	6	7
0.1	0.25	0.20	0.14	0.11	0.094	0.095	0.11
0.3	0.32	0.19	0.14	0.10	0.081	0.078	0.091
0.5	0.43	0.18	0.12	0.085	0.063	0.056	0.068
0.7	0.60	0.15	0.088	0.057	0.039	0.031	0.037
0.9	0.84	0.079	0.033	0.018	0.012	0.0081	0.0078

4 関連研究との比較

IRM との比較　IRM は，毎回の参照は独立に行われ，アドレス j へのアクセス確率が時刻や過去の履歴に依存しない定数で与えられるという仮定を置くモデルである．

第 3 節で述べた例では，定常状態では各アドレスを参照する確率が，いずれも 1/7 になっている．ところが，SDP は表や図に示す通りパラメータの値によって大きく異なっている．

SLRUM との比較　SLRUM は，SDP に対して $i < j \Rightarrow Pr[\delta = i] \geq Pr[\delta = j]$ という仮定を置くモデルである．

ところが例 1 で示したように，ループ構造を持つような場合には，この仮定は必ずしも成り立たないことがわかる．

以上のことから，IRM や SLRUM は LRU スタックの状態を正確には表していないために，ミス率を正確に見積もるためのモデルとしては不十分であることがわかる．

5 おわりに

本稿では，プログラムのアドレス参照列がマルコフ連鎖であるときに，LRU スタックの状態遷移もマルコフ連鎖で記述できることを示し，いくつかの例に関して，スタック距離 (参照) 確率を計算した．

この結果をみると，過去に提案されている IRM や SLRUM の仮定が簡単には成り立っていないことがわかる．

メモリ参照をマルコフ連鎖で記述するためには，遷移確率行列の要素を全て決定する必要があり，その数は $M^2 - M$ と非常に大きい．そこで，第 3 節で示したような少ないパラメータで遷移確率行列を構成する手法が必要となる．しかしながら，実際に測定されたデータから，遷移確率行列を構築する手法については，残された課題である．

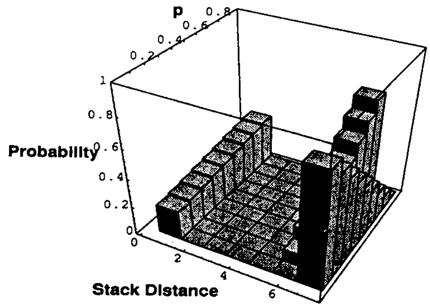

図 1: Stack Distance Probability(例 1, $\varepsilon = 0.2$)

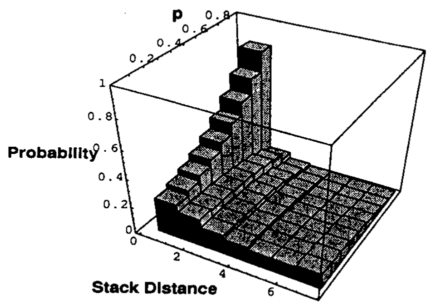

図 2: Stack Distance Probability(例 2)

参考文献

[1] I. Kino, and A. Tanaka, Stack Distance Distribution in LRU, 情報ネットワークに関する性能評価モデルの総合的研究, 京都・嵯峨野, Jan.22-24 1996.

[2] J. Spirn, Distance String Models for Program Behavior, *IEEE Computer*, Vol. 9 (11), 1976, pp. 14–20.