高速自動微分を用いた区間解析によるレイトレーシング法

4S−2

原 秀人　朴 敬蘭　星 守　大森 匡
電気通信大学 大学院 情報システム学研究科*

1 はじめに

レイトレーシング法において曲面を生成するには，視点から一番近い 視線と曲面との交点，及び その交点における法線ベクトルを求める必要がある．特に 一般の曲面を扱う場合には 非線形方程式を反復近似法により数値的に解いて交点を求めることが多い．代表的な反復法としては Newton Raphson 法が有名だが，一番近い交点を得るとは限らないという問題がある．

上述した問題は ある種の曲面に対しては 区間解析法[2] によって解決できる．区間解析法は，基本的な関数の合成によって表現された関数曲面に対し，与えられた区間における解の存在を保証しながら区間を絞っていく手法である [2].

一般に区間解析法では 導関数値の範囲を保証するとより速い収束を実現できる (Interval Newton 法 [2]). しかし，導関数値の計算に数値微分を用いると導関数値の区間を保証できない．その結果，区間解析を用いても数値微分を使う限り，与えられた関数曲面を 高精度に，かつ，人手を介さずに描画することは困難である．

そこで我々は，区間解析法において 高速自動微分法を用いることで 与えられた関数の導関数値の範囲を保証し，それによって 関数曲面を高精度に描画する光線追跡法を提案してきた．本稿では陰曲面とパラメタ曲面に関して実際に描画させた例を報告する．

2 アルゴリズム

2.1 Interval Newton 法

基本的な区間解析を用いた反復法は，区間を二分して範囲を狭めていくことからもわかるように収束が一次で遅い．より速い方法として Newton Raphson 法に区間解析を用いる Interval Newton 法がある．この方法をレイトレーシングにおける交点の計算に用いる．

区間 Yが与えられた時に関数値 $f(Y)$ がとりうる範囲を含む区間を与える関数を InclusionFunction と呼び $\Box f(Y)$ と記す．区間 Yにおける一次導関数の Inclusion

```
procedure subdivide;
  var L : List of Intervals;
  var Y, Y1, Y2 : Interval;
  function interval_newton(Y : Interval) : Interval;
    var Z:Interval;
    begin
      if 0 ∈ □f(Y) then interval_newton := φ
      else
        begin
          if 0 ∉ □f'(Y) then
            do
              区間 Y から中点 c を選ぶ;
              Z = c − f(c)/□f'(Y);
              Y := Z ∩ Y;
            while (Y が存在し かつ
                   区間 Yが解とみなせる程狭くない);
          interval_newton := Y
        end
    end;
  begin
    while L is nonempty
      begin
        リスト L から区間 Xを取り出す;
        Y = interval_newton(X);
        if Y = φ then 区間 Yを捨てる
        else
          if Yを解とみなせるか then Yを解とする
          else
            begin
              区間 Yを区間 Y1, Y2 に分割する;
              Y1, Y2 をリスト L に加える
            end
      end
  end;
begin
  区間の初期値をリスト L に加える;
  subdivide
end.
```

図 1: Interval Newton 法

*Ray Tracing using Interval Method with Fast Automatic Differentiation
H.Hara, K.Park, M.Hoshi, T.Ohmori, (U. Electro-Comm.)

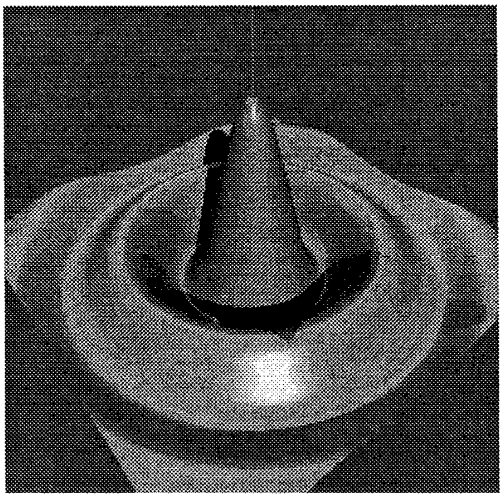

図 2: 陰曲面の生成例（光源は３つ）

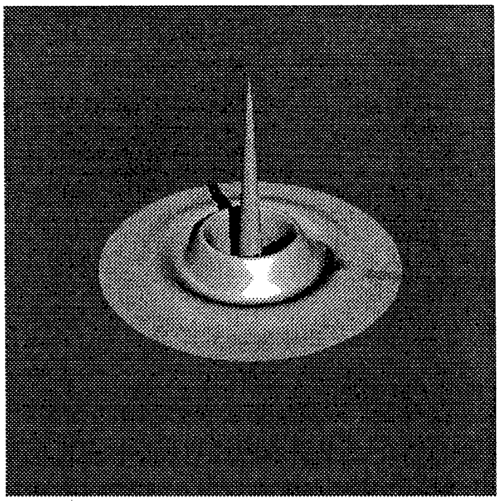

図 3: パラメタ曲面の生成例（光源は２つ）

Function $\square f'(Y)$ が 0 を含むときは Interval Newton 法は適用できないので，その場合は，区間 Yにおいて Interval Newton 法が適用できるまで基本的な区間解析により区間を分割するようにした．この部分の収束速度は一次であるので，全体の収束速度は最良の場合二次で最悪の場合 一次となる．

アルゴリズムを図 1に示す．

2.2 高速自動微分法

Interval Newton 法では，一次導関数の Inclusion Function $\square f'(Y)$ を求めなければならないが，数値微分では与えられた区間での導関数値のとりうる範囲を求めることはできない．

関数が与えられたとき，その導関数値は合成関数の微分の公式によって基本的な関数の導関数値計算に分解できる．このことを用いて高速で精度よく導関数値を求める方法が 高速自動微分法である．高速自動微分法で生成される導関数値の計算手順を区間演算でたどれば導関数の Inclusion Function $\square f'(Y)$ を求めることができる．

Inclusion Function $\square f'(Y)$ が得られるのであれば，より精度のよい Inclusion Function $\square f(Y)$ を，平均値の定理より得られる包含関係

$$\square f(Y) \subseteq [f(y), f(y)] + \square f'(Y) \cdot (Y - [y, y])$$

を利用することにより求めることもできる（$y \in Y$とする）．

また，高速自動微分法を用いると，法線ベクトルの計算もより正確に行なえるようになる．

3 実験と今後の課題

本稿および文献 [1] でのべた手法を陰曲面およびパラメタ曲面の描画に適用した例を図 2，図 3にあげる．

図 2 は，

$$f(x,y,z) = 10 \sin \sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x^2+y^2}\ z = 0$$

ただし，

$$-4\pi \le x \le 4\pi, -4\pi \le y \le 4\pi$$

で表される陰曲面であり，図 3は，

$$S_x = u \cos(\pi v)$$
$$S_y = u \sin(\pi v)$$
$$S_z = 7 \exp(-u) \cos(\pi u)$$

ただし，

$$0 \le u \le 2\pi, 0 \le v \le 2\pi$$

で表されるパラメタ曲面である．図 2, 3は，従来の数値微分では描画が困難な曲面であり，高速自動微分法を用いた区間解析の優秀性を示している．

高速自動微分法を区間解析に用いた場合，任意の区間での関数の単調性や 二次の導関数値の区間保証を 得ることができる．今後，こうした性質を利用して より速い解の収束の可能性を検討する予定である．

参考文献

[1] Kyounglan Park, Mamoru Hoshi, Tadashi Ohmori, *New and Robust Ray Intersection Using Interval Analysis and FAD.* 情報処理学会第 49 回全国大会講演論文集 (2), pp.333-334, 1994.

[2] Jhon M. Snyder ,*Generative Modeling for C.G. and CAD.* Academic Press,INC., 1992.

[3] 杉原 正顯, 室田 一雄 , 数値計算法の数理. 岩波書店, 1994.