4C－5

転送コストが2段階のネットワークの最適なファイルスケジューリングについて

七里　嘉治　　　　金子美博
岐阜大学工学部電子情報工学科

1．はじめに

従来までのファイルスケジューリングの理論[1]では，ファイルの転送コストは全て線形であった．しかし，電話料金などのように回線のコストが階段状である場合が実用上多々ある．従って，転送コストが階段状であるファイル転送ネットワークを扱うことは，ファイルスケジューリングの理論を，より実際的なシステムへ応用するという点で意義がある．

本報告では，転送コストが2段階のファイル転送ネットワークで，最適なファイルスケジューリングを求める問題がＮＰ困難[2]であることを示す．

2．準備

ファイル転送ネットワークNとは，点集合V,枝集合B,点vのコスト及び需要値がそれぞれ$c_v(\mathrm{v})$及び$d(\mathrm{v})$である有向ネットワークであり，$N=(V, B, c_v, d)$で表す．また，Nを通して提供されるファイルをJとする．Jのコピーを実際に必要としている点の集合をUとする．すなわち，$U=\{\mathrm{u}\in V \mid d(\mathrm{u})>0\}$とし，$U$を$N$の正の需要値点集合と呼ぶ．本報告では，全ての点vが$\mathrm{v}\in U$,すなわち$d(\mathrm{u})>0$であるとする．また，正の整数の集合を$\mathbb{Z}^+$で表し，$\mathbb{Z}_0{}^+=\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$とする．

N上の各点vに対して，vに入る枝集合及びvから出る枝集合をそれぞれ$B_-(\mathrm{v})$及び$B_+(\mathrm{v})$で表す．また，B上の関数fに対して，パスP上の全ての枝eが$\mathrm{f(e)}>0$ならば，Pはf-positiveであるという．

N上のファイルスケジューリングを次のように定義する．

〔定義1〕　$N=(V, B, c_v, d)$に対して，Vを$\mathbb{Z}_0{}^+$に写像する関数ϕ，及びBを$\mathbb{Z}_0{}^+$に写像する関数fが以下の2つの条件を満たすならば，(ϕ, f)をN上のファイルスケジューリングと呼ぶ．

(C1)　各点におけるJのコピーの部数の保存則；

$$1+\sum_{\mathrm{e}\in B_-(\mathrm{v}_1)}\mathrm{f(e)}+\phi(\mathrm{v}_1)=\sum_{\mathrm{e}\in B_+(\mathrm{v}_1)}\mathrm{f(e)}+d(\mathrm{v}_1),$$

$$\sum_{\mathrm{e}\in B_-(\mathrm{v})}\mathrm{f(e)}+\phi(\mathrm{v})=\sum_{\mathrm{e}\in B_+(\mathrm{v})}\mathrm{f(e)}+d(\mathrm{v})\quad(\mathrm{v}\in V\backslash\{\mathrm{v}_1\}),$$

(C2)　Jのコピーの到達性；
$\phi(\mathrm{v})>0$である点vに対して，v_1からvへf-positiveなパスが存在する．□

本報告では，送られるJのコピーの部数に対して，転送コストが2段階の場合について考える．

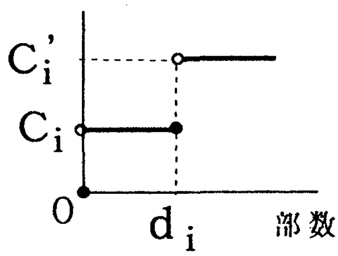

図1．転送されるJのコピーの部数に対するコスト

〔定義2〕　2段階の転送コストを持つファイル転送ネットワークNとは，Bの各枝e_i($1\leq i\leq|B|$)を通るJのコピーの部数を$\mathrm{f(e}_i)$とすると，e_iを通して$\mathrm{f(e}_i)$部のJのコピーを送るのに要するコスト$c_f(\mathrm{e}_i)$が

$$c_f(\mathrm{e}_i)=\begin{cases}0 & (\mathrm{f(e}_i)=0)\\ C_i & (0<\mathrm{f(e}_i)\leq d_i)\\ C_i' & (\mathrm{f(e}_i)>d_i)\end{cases}$$

であるものをいう．ただし，$C_i'>C_i$及び$d_i\in\mathbb{Z}^+$とする．□

〔定義3〕　N上のファイルスケジューリング$D=(\phi, \mathrm{f})$において，各点でJのコピーを作るのに要するコストの総和と各枝でJのコピーを送るのに要するコストの総和の和をDのコストと呼び，$\mathrm{C}(D)$で表す．すなわち，

$$\mathrm{C}(D)=\sum_{\mathrm{u}\in V}c_v(\mathrm{u})\phi(\mathrm{u})+\sum_{\mathrm{e}\in B}c_f(\mathrm{e})$$

とする．コストが最小であるファイルスケジューリングを最適なファイルスケジューリングと呼ぶ．□

3．ＮＰ完全性

最適なファイルスケジューリングを求める問題がＮＰ困難であることを示すために，次のような判定問題を紹介する．

"An Optimal File Scheduling on a Network with Two-Step Transmission Costs"
Yoshiharu SHICHIRI, and Yoshihiro KANEKO
Gifu University

〔判定問題P_1(ナップサック問題)〕

有限集合Aの各元aに対して，正整数の大きさs(a)及び正整数の価値k(a)が与えられたとする．このとき，正整数s_1及びk_1に対して，Aの部分集合A'で，

$$\sum_{a \in A'} s(a) \leqq s_1, \qquad (1)$$
$$\sum_{a \in A'} k(a) \geqq k_1$$

を満たすようなものが存在するか判定せよ． □

この判定問題は，最悪，全ての場合をしらみつぶしに調べなければ答えが出ないことがあるNP完全問題であることが知られている[2]．問題P_1の任意の個別問題に対して，以下のような2段階の転送コストを持つファイル転送ネットワークを作る．

〔定義4〕 問題P_1の具体例I_1(有限集合A，大きさs，価値k，正整数s_1及びk_1)に対して，ファイル転送ネットワーク$N(I_1)$は，2点v_1，v_2及び$|A|$本の多重枝(v_1, v_2)からなるグラフ構造を持つ．また，$s_0=\min\{s(a) \mid a \in A\}$とし，各点のコストは

$$c_V(v_1)=s_0,$$
$$c_V(v_2)=s_0 \cdot k_1+s_1+1,$$

であり，各点の需要値は，$d(v_1)=1$，$d(v_2)=k_1$である．さらに，$i\ (1 \leqq i \leqq |A|)$番目の枝e_iを通って，$f(e_i)$部のJのコピーを送るのに要する2段階の転送コスト$c_f(e_i)$は

$$c_f(e_i)=\begin{cases} 0, & (f(e_i)=0) \\ s(a_i), & (0<f(e_i) \leqq k(a_i)) \\ s_0 \cdot k_1+s_1+1, & (f(e_i)>k(a_i)) \end{cases}$$

である． □

〔補題1〕 判定問題P_1の具体例I_1がyesであるとき，かつそのときに限り，ファイル転送ネットワーク$N(I_1)$上に，コストが$s_0 \cdot k_1+s_1$以下のファイルスケジューリングが存在する．

(証明) (十分性) I_1に対して，Aの部分集合A_1が式(1)を満たすとする．A_1に対して，$\phi_1(v_1)=k_1$，$\phi_1(v_2)=0$とし，Aのi番目の要素a_iが$a_i \in A_1$ならば，

$$f_1(e_i)=k(a_i)-\delta_i$$

とし，そうでなければ，

$$f_1(e_i)=0$$

とし，δ_i($\delta_i<k(a_i)$を満たす非負整数)を適当に選べば，式(1)より，$\sum_{e \in B} f_1(e)=k_1$である．このとき，$D_1=(\phi_1, f_1)$は$N$のファイルスケジューリングであり，

$$C(D_1)=c_V(v_1) \cdot k_1+\sum_{e \in B} c_{f1}(e)$$
$$=s_0 \cdot k_1+\sum_{a \in A_1} s(a) \leqq s_0 \cdot k_1+s_1$$

である．従って，I_1に対して，yesである部分集合A_1に対して，コストが$s_0 \cdot k_1+s_1$以下のファイルスケジューリングが$N(I_1)$上に存在する．

(必要性) ファイルスケジューリング$D_2=(\phi_2, f_2)$が$C(D_2) \leqq s_0 \cdot k_1+s_1$であるとする．枝$e_i$が$f_2(e_i)>k(a_i)$ならば，定義4より，$c_{f2}(e_i)=s_1+s_0 \cdot k_1+1$となり，必要性の仮定に反する．従って，$f_2(e_i)>0$ならば，$f_2(e_i) \leqq k(a_i)$である．同様に，$\phi_2(v_2)=0$並びに$\phi_2(v_1)=k_1$が導ける．$(\phi_2, f_2)$に対して，Aの部分集合$A_2$を，$A_2=\{a_i \in A \mid f_2(e_i)>0\}$とすると，必要性の仮定より，

$$C(D_2)=s_0 \cdot k_1+\sum_{e \in B} c_{f2}(e)=s_0 \cdot k_1+\sum_{a \in A_2} s(a)$$
$$\leqq s_0 \cdot k_1+s_1$$

であるため，$\sum_{a \in A_2} s(a) \leqq s_1$である．また，$\sum_{e \in B} f(e)=k_1$より，$\sum_{a \in A_2} k(a)=k_1$が得られる．

従って，A_2は式(1)を満たす． □

補題1より，次の命題が得られる．

〔命題1〕 2段階のコストを持つファイル転送ネットワークにおいて，コストが一定値以下のファイルスケジューリングが存在するかどうかを判定する問題はNP完全である．

(証明) この判定問題は明らかにクラスNPに属する．また，定義4より，判定問題P_1の具体例I_1に対して，ファイル転送ネットワーク$N(I_1)$は多項式の手間で作ることができる．さらに，補題1より，P_1は，ファイルスケジューリングの判定問題に変換可能である．従って，題意が成り立つ． □

命題1より，2段階コストを持つファイル転送ネットワークにおいて，最適なファイルスケジューリングを求める問題はNP困難な問題である．

4．おわりに

本報告では，N上の最適なファイルスケジューリングを求める問題がNP困難であることを示した．

参考文献

[1] Kaneko,Y., Shinoda,S., and Horiuchi,K.,"A synthesis of an optimal file transfer on a file transmission net," IEICE Trans, Vol,E76-A,3 pp.377-386, Mar,1993.

[2] Garey,M.R. and Johnson,D.S. : Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness, W.H. Freeman, San Francisco. (1979)