

## 非線形音波伝搬の数値シミュレーション

3C-9

牧野一憲、堀田裕弘、村井忠邦  
富山大学工学部

### 1 まえがき

振幅の大きな音波（有限振幅音波）の伝搬では、圧力変動に伴う媒質密度の変化によって、各部分の伝搬速度が変化する。したがって、音波伝搬を記述する方程式は、媒質密度が圧力の関数として表されるような流体場の非線形方程式（連続の式、運動方程式、状態方程式の連立）となる<sup>[1],[2]</sup>。従来、この非線形方程式を線形近似して解く試み<sup>[3]</sup>がなされているが、この方法では3次以上の高調波成分が無視される。そこで、本研究では、有限要素法を用いて直接的に非線形方程式を解くことを試みる。

### 2 場の支配方程式

本研究では2次元場を取り扱う。2次元場における場の支配方程式（連続の式、運動方程式、状態方程式）は以下ようになる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \right) = -\nabla p \quad (2)$$

$$p = p(\rho) = p_0 (\rho / \rho_0)^\gamma \Rightarrow \rho = \frac{\rho_0}{p_0^{1/\gamma}} p^{1/\gamma} \quad (3)$$

ここで、 $\rho$  媒質密度、 $p$  音圧（絶対圧）、 $\mathbf{v} = (u, v)$  粒子速度、 $p_0$  平衡状態での圧力、 $\rho_0$  媒質密度、 $\gamma$  比熱比である。

### 3 空間及び時間領域での離散化

離散化では要素として、 $p, \mathbf{v}$  については三角形1次要素を用いる。 $\rho$  については要素の重心での  $p$  により、要素内で一定とする。空間的にはガラーキン法を、時間的には差分法（後退差分）を用いる。

(1),(2) 式の離散化表現は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} Q_e \equiv & \frac{1}{\Delta t} (\rho_t - \rho_{t-\Delta t}) \int_{\Omega_e} N d\Omega \\ & - \rho_t \int_{\Omega_e} \left( \frac{\partial N}{\partial x} N^\top \mathbf{u}_t + \frac{\partial N}{\partial y} N^\top \mathbf{v}_t \right) d\Omega \\ & + \rho_t \int_{\Gamma_e} N (N^\top \mathbf{u}_t n_x + N^\top \mathbf{v}_t n_y) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} G_{e_x} \equiv & \frac{1}{\Delta t} \rho_t \int_{\Omega_e} N N^\top (\mathbf{u}_t - \mathbf{u}_{t-\Delta t}) d\Omega \\ & + \rho_t \int_{\Omega_e} N N^\top \mathbf{u}_t \frac{\partial N^\top}{\partial x} \mathbf{u}_t d\Omega \\ & + \rho_t \int_{\Omega_e} N N^\top \mathbf{v}_t \frac{\partial N^\top}{\partial y} \mathbf{u}_t d\Omega \\ & + \int_{\Omega_e} N \frac{\partial N^\top}{\partial x} p_t = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} G_{e_y} \equiv & \frac{1}{\Delta t} \rho_t \int_{\Omega_e} N N^\top (\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_{t-\Delta t}) d\Omega \\ & + \rho_t \int_{\Omega_e} N N^\top \mathbf{u}_t \frac{\partial N^\top}{\partial x} \mathbf{v}_t d\Omega \\ & + \rho_t \int_{\Omega_e} N N^\top \mathbf{v}_t \frac{\partial N^\top}{\partial y} \mathbf{v}_t d\Omega \\ & + \int_{\Omega_e} N \frac{\partial N^\top}{\partial y} p_t = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

ここで  $N$  は内挿関数、 $\mathbf{u}_t, \mathbf{v}_t, p_t$  は時刻  $t$  における、要素節点での粒子速度のそれぞれ  $x, y$  成分、および音圧である。これらの式は非線形方程式であるため、その求解にはニュートンラプソン法を用いる。このため、以下の(4)(5)(6)式を  $\mathbf{u}_t, \mathbf{v}_t, p_t$  で微分した式が必要である。

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_e}{\partial \mathbf{u}_t} \equiv & -\rho_t \int_{\Omega_e} \left( \frac{\partial N}{\partial x} N^\top \right) d\Omega \\ & + \rho_t \int_{\Gamma_e} \left( N N^\top n_x \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_e}{\partial \mathbf{v}_t} \equiv & -\rho_t \int_{\Omega_e} \left( \frac{\partial N}{\partial y} N^\top \right) d\Omega \\ & + \rho_t \int_{\Gamma_e} \left( N N^\top n_y \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_e}{\partial p_t} \equiv & \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_e} N d\Omega \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) \\ & - \int_{\Omega_e} \left( \frac{\partial N}{\partial x} N^\top \mathbf{u}_t + \frac{\partial N}{\partial y} N^\top \mathbf{v}_t \right) d\Omega \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) \\ & + \int_{\Gamma_e} N \left( N^\top \mathbf{u}_t n_x + N^\top \mathbf{v}_t n_y \right) d\Gamma \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{G}_{e_x}}{\partial \mathbf{u}_t} &\equiv \frac{1}{\Delta t} \rho_t \int_{\Omega_e} \mathbf{N} \mathbf{N}^T d\Omega \\ &+ \rho_t \int_{\Omega_e} \mathbf{N} \mathbf{N}^T \left\{ \mathbf{I} \left( \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \mathbf{u}_t \right) + \mathbf{u}_t \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \right\} d\Omega \\ &+ \rho_t \int_{\Omega_e} \mathbf{N} \mathbf{N}^T \mathbf{v}_t \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} d\Omega \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}_{e_x}}{\partial \mathbf{v}_t} \equiv \rho_t \int_{\Omega_e} \mathbf{N} \mathbf{N}^T \left\{ \mathbf{I} \left( \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \mathbf{v}_t \right) \right\} d\Omega \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{G}_{e_x}}{\partial \mathbf{p}_t} &\equiv \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_e} \mathbf{N} \mathbf{N}^T (\mathbf{u}_t - \mathbf{u}_{t-\Delta t}) d\Omega \left( \frac{\partial \rho_t}{\partial \mathbf{p}} \right) \\ &+ \int_{\Omega_e} \mathbf{N} \mathbf{N}^T \mathbf{u}_t \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \mathbf{u}_t d\Omega \left( \frac{\partial \rho_t}{\partial \mathbf{p}} \right) \\ &+ \int_{\Omega_e} \mathbf{N} \mathbf{N}^T \mathbf{v}_t \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \mathbf{u}_t d\Omega \left( \frac{\partial \rho_t}{\partial \mathbf{p}} \right) \\ &+ \int_{\Omega_e} \mathbf{N} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} d\Omega \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}_{e_y}}{\partial \mathbf{u}} \equiv \rho_t \int_{\Omega_e} \mathbf{N} \mathbf{N}^T \left\{ \mathbf{I} \left( \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \mathbf{v}_t \right) \right\} d\Omega \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{G}_{e_y}}{\partial \mathbf{v}} &\equiv \frac{1}{\Delta t} \rho_t \int_{\Omega_e} \mathbf{N} \mathbf{N}^T d\Omega \\ &+ \rho_t \int_{\Omega_e} \mathbf{N} \mathbf{N}^T \mathbf{u}_t \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} d\Omega \\ &+ \rho_t \int_{\Omega_e} \mathbf{N} \mathbf{N}^T \left\{ \mathbf{I} \left( \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \mathbf{v}_t \right) + \mathbf{v}_t \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \right\} d\Omega \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{G}_{e_y}}{\partial \mathbf{p}} &\equiv \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_e} \mathbf{N} \mathbf{N}^T (\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_{t-\Delta t}) d\Omega \left( \frac{\partial \rho_t}{\partial \mathbf{p}} \right) \\ &+ \int_{\Omega_e} \mathbf{N} \mathbf{N}^T \mathbf{u}_t \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \mathbf{v}_t d\Omega \left( \frac{\partial \rho_t}{\partial \mathbf{p}} \right) \\ &+ \int_{\Omega_e} \mathbf{N} \mathbf{N}^T \mathbf{v}_t \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \mathbf{v}_t d\Omega \left( \frac{\partial \rho_t}{\partial \mathbf{p}} \right) \\ &+ \int_{\Omega_e} \mathbf{N} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} d\Omega \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \rho_t}{\partial \mathbf{p}} \right) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho_t}{\partial p_1} \\ \frac{\partial \rho_t}{\partial p_2} \\ \frac{\partial \rho_t}{\partial p_3} \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\rho_0}{p_0^{1/\gamma}} \cdot \frac{1}{3\gamma} \cdot \left\{ \frac{1}{3} (p_1 + p_2 + p_3) \right\}^{\frac{1}{\gamma}-1} \\ \frac{\rho_0}{p_0^{1/\gamma}} \cdot \frac{1}{3\gamma} \cdot \left\{ \frac{1}{3} (p_1 + p_2 + p_3) \right\}^{\frac{1}{\gamma}-1} \\ \frac{\rho_0}{p_0^{1/\gamma}} \cdot \frac{1}{3\gamma} \cdot \left\{ \frac{1}{3} (p_1 + p_2 + p_3) \right\}^{\frac{1}{\gamma}-1} \end{pmatrix}^T \end{aligned} \quad (16)$$

これらの式より、全ての節点でのパラメータについての代数方程式を作成し計算することにより、時刻  $t$  での解が求まる。更に時間についての反復計算を行なうことにより、時間応答の解が求められる。

## 4 数値例

図1に計算に用いたモデルを、図2に静止状態から  $t = 0$  で  $160\text{dB}$ ,  $1\text{KHz}$  の正弦波で音圧駆動したときの、駆動面より  $1.0\text{m}$  離れた点での音圧変化を示す。

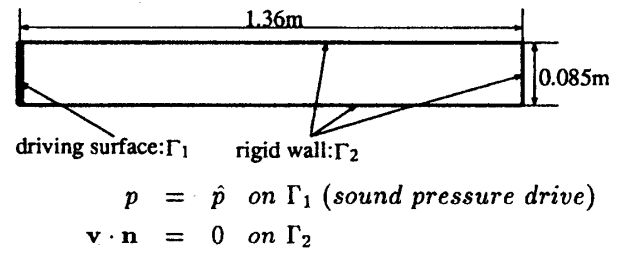


図1: 音響管モデル

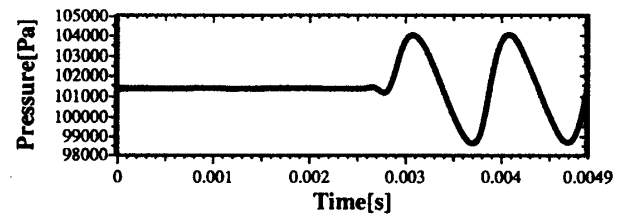


図2: 駆動面より  $1.0\text{m}$  離れた点での音圧変化 ( $160\text{dB}$  の正弦波で音圧駆動)

## 5 あとがき

数値例より、観測点での音圧波形に歪みが生じていることが分かる。このことより、音波伝搬の非線形性がシミュレートされていると考えられる。

今後、解析解および実測データとの比較を行ない本研究の妥当性について詳しく検討していきたい。

## 文献

- [1] Eugen Skudrzyk: The Foundataion of Acoustics, Springer-Verlag(1971)
- [2] 日野幹男: 流体力学 [改定版], 朝倉書店 (1992)
- [3] 村井, 加川: 境界要素法による有限振幅音波のシミュレーション, 境界要素法研究会, 境界要素法論文集第4巻, 221-226(1987)