Regge 多様体による重力場方程式の数値計算

3C−4 佐藤哲 岩佐英彦 竹村治雄 横矢直和
奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科

1 はじめに

偏微分方程式の数値計算の分野において、重力場の計算は流体場や電磁場に比べ研究が少ない。その理由としては重力場理論が難解なこと、基礎方程式が4階非線形偏微分方程式で、差分的に解くことが難しいことなどが上げられる [1]。本研究では、重力場の偏微分方程式を差分を行なわずに連立方程式に変換する Regge Calculus[2][3] を使って、重力場の数値計算を行なう。Regge Calculus は、2次元や3次元空間においては近年盛んに研究されているが [4]、4次元時空での研究は少ない [5] 。本報告では4次元空間において Regge Calculus を用い、モンテカルロ法により数値計算を行う方法について述べる。

2 Regge Calculus とその計算法

2.1 Regge Calculus

物理学における格子場理論では、2次元空間なら3角形、3次元空間なら4面体といった全空間を分割できる単体を使って格子を作り、その上で方程式を展開する。この方法で重力場を格子化すると、各単体に対して欠損角が現れる。欠損角は

$$\delta_i = 2\pi - \sum_k \theta_k$$

で定義され、2次元では図1のようになる。図1は5角形の中の1点が突き出ている平坦でない形を切り開いたところで、もし5角形が平坦なら欠損角はゼロとなる。このように2次元では頂点の周りで欠損角が定義されるが、3次元では辺の周り、4次元では3角形の周りで欠損角が定義される。

重力場解析では4次元時空の単体分割を行なう。Regge(1961) は単体分割により、真空での重力場方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 \qquad (1)$$

が格子場において、次のような連立方程式の形に書けることを証明した。

$$\sum_i \delta_i \cot\theta_{ij} = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, m) \qquad (2)$$

ここで、δ_iはi番目の三角形の欠損角、θ_{ij}はi番目の三角形のj番目の辺に向かい合う角の大きさ、mは三角形の辺の数の総数である。(2) の左辺は角度のみで構成され、角度は余弦定理により辺の長さで表すことができるので、結局4次元の方程式を2次元で構成できたことになる。ただし余弦定理を使うためには、空間を小さな単体に分割し、単体の辺の長さを求める作業が必要となる。

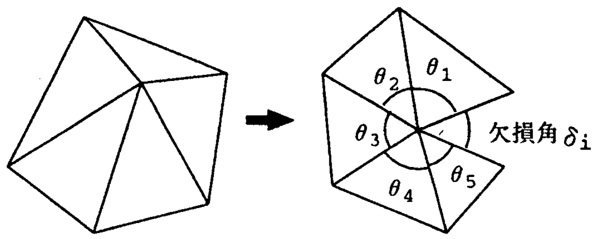

図 1: 2次元多様体における欠損角

2.2 単体分割

コンピュータビジョンやコンピュータグラフィックスにおいて曲面を三角形パッチで近似することがしばしば行なわれるが、Regge Calculus は対象が4次元空間のため、三角形パッチを拡張した4次元単体で空間を近似する。ただし簡単のため、以下では3次元空間を例にとり、空間を単体に分割する方法を述べる。

図2のように各頂点に原点からのハミング距離を割り当てる。そしてハミング距離が0、1、2、3の4点を結ぶと太線の部分のような3次元単体である4面体が構成できる。このアルゴリズムを使うと立方体を9個の単体に分割できる。

同様に4次元空間でこの手法を使用すると、4次元超立方体を24個の単体に分割できる。ただし、こ

Numerical Analysis of Gravitational Equations Using Regge Calculus
Tetsu Satoh, Hidehiko Iwasa, Haruo Takemura, and Naokazu Yokoya
Nara Institute of Science and Technology (NAIST)
8916-5 Takayama, Ikoma, Nara 630-01, Japan

こまではハミング距離空間という位相空間を使用しているため、数値計算を行なうためには頂点間の距離を算出しなければならない。その方法を次節で述べる。

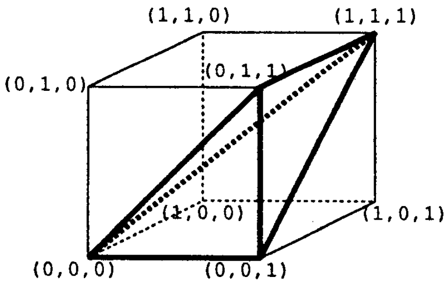

図 2: 3 次元立方体の単体分割

2.3 微小距離

2 点間の距離 ds は、例えば 3 次元ユークリッド空間 (x, y, z) では $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ となる。しかし重力場では空間が歪むために非常に複雑な形になる。

過去の研究では時空を辺の長さが全て等しい単体で近似し、それを摂動させて 2 点間の距離を求めていく方法が用いられてきた [5]。今回は 3 次元空間での極座標系 (r, θ, ϕ) において重力が時間的に不変、空間的に球対称の二つの条件を付けることにより

$$ds^2 = A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \quad (3)$$

と簡単になった微小線素の式を採用する。関数 $A(r)$ と $B(r)$ は未定関数であり、これを次節の数値解法によって求める。

この方法は、本来座標系に依存しない特徴のある Regge Calculus に座標系を導入してしまうという欠点がある反面、従来よりも複雑な空間を扱えるという利点がある。

3 計量テンソルの数値解法

次のようなアルゴリズムで数値計算を行ない、計量テンソルを求める。境界条件として、原点から十分遠方では空間が平坦であることを使う。また束縛条件としては前章で仮定した、重力が時間的に不変、空間的に球対称であることを使う。

(1) $(\Delta t, \Delta r, \Delta\theta, \Delta\phi)$ に微小な定数を設定する

(2) 全空間において $A(r)$ と $B(r)$ の初期値を設定する

(3) 式 (3) の A と Bを現在の値からランダムに少し動かし、Δs^2を計算する

(4) 長さΔs^2より三角形内部の角度及び欠損角を計算し、全空間において式 (2) を満たすかどうか調べる

(5) 満たすなら、その時の A と Bを計量テンソルとして登録し、終了する。そうでないなら、ステップ 3 に戻る

この方法で全ての格子点で計量テンソルを決定する。計量テンソルが定まれば空間の性質が決まる。

4 おわりに

Regge Calculus は重力場方程式を数値的に解くための非常に便利な手法である。現時点では全空間での欠損角を求めるところまでプログラミングが終っているが、角の計算に誤差がなく、通常の高階偏微分方程式の解法である何度も差分を取る方法よりも精度が良い最終結果を得られることを予想できる。シミュレーション結果の検討と解析解との比較による検証については、発表当日に示す。

今後はさらに本研究の結果をもとに、ブラックホール周囲の情景を可視化する研究へと発展させる予定である。

参考文献

[1] 山下義行, "ブラック・ホールのコンピュータ・グラフィックス: 光線追跡法の曲がった 4 次元時空への拡張", 情処学論, Vol.30, No.5, pp.642-651, (1989).

[2] C.W.Misner, K.S.Thorne and J.A.Wheeler, *Gravitation*, pp.1166-1179, W.H.Freeman and Co.(1973).

[3] 二宮正夫, 格子時空と重力, 別冊数理科学 場の物理と数理, p137, サイエンス社 (1991).

[4] H.W.Hamber and R.M.Williams, "Simplicial quantum gravity in three dimensions : Analytical and numerical results", Phys. Rev. D, Vol.47, No.2, pp.510-528 (1993).

[5] H.W.Hamber and R.M.Williams, "Simplicial quantum gravity with higher derivative terms : Formalism and numerical results in four dimensions", Nucl. Phys., B269, pp.712-743 (1986).