ミクセルが存在する場合の混合分布推定*

2C−2

北本 朝展　高木 幹雄[†]
東京大学生産技術研究所[‡]

1　はじめに

一つのピクセル内部は一つの分類カテゴリが占有している (ピュアピクセル) というのが画像処理の通常の仮定である。しかしリモートセンシング画像のように、画像の解像度とカテゴリ領域の大きさが同程度の場合は、一つのピクセル内部に複数の分類カテゴリが存在することがある。このような場合そのピクセルは「ミクセル」と呼ばれる。

ピュアピクセルのみの場合の分類では最尤法 (ベイズ推定) などの手法が用いられるが、これらの手法では**すべてのピクセルはピュアピクセル**として分類される。しかしミクセルの存在により分類精度が悪化することがあるため、ミクセルによる影響を適切に評価する必要がある。そこで過去に提案された手法は、基本的には画像ヒストグラムの混合分布を一種のメンバーシップ関数とみなすものである。しかしこのような手法では原理的に、**すべてのピクセルはミクセル**と分類されてしまう。そこで本研究では**ミクセル分布**という新しい分布を導出し、ベイズ推定の枠組でミクセルを分類できる手法を提案する。

このミクセル分布は、正規分布の苦手な**裾の重い分布**も表現できるという特徴を有する。すなわち、実際の分布では裾の重い分布が頻繁に観察されるため、その種の分布を苦手とする点が正規分布の限界であると言われてきた。しかし本研究で提案するミクセル分布は、分布の正規性およびいくつかの自然な仮定のみから導出されているにもかかわらず、裾の重い分布をも十分に表現できる能力を有している。

2　ミクセル分布

本研究の仮定　あるピクセルの内部でのカテゴリ C_i の占有率を θ $(0 \leq \theta \leq 1)$ とし、別のカテゴリ C_j が残りの占有率 $(1-\theta)$ を占めるとする。このようなミクセルを、ここでは2カテゴリミクセル m_{ij} と呼ぶ。このときミクセル m_{ij} からの輝度値 r_{ij} は、カテゴリ C_i からの輝度値 x_i とカテゴリ C_j からの輝度値 x_j の２つの輝度値の線形結合

$$r_{ij}(\theta) = \theta x_i + (1-\theta) x_j \qquad (1)$$

で表されると仮定する。そしてさらに、x_i の確率密度関数 p_i が正規分布 $N(\mu_i, {\sigma_i}^2)$ で表されると仮定する。このように x_i と x_j が確率変数であることに注意すると、r_{ij} も確率変数となることがわかる。

占有率固定の場合のミクセル分布　r_{ij} の確率密度関数 p_{ij} の「形」は、通常は知ることができない。しかし確率変数 X_i と X_j の確率密度関数がもし両方とも同じ型の**安定分布**に属する場合は、確率変数 $c_i X_i + c_j X_j$ $(c_i, c_j > 0)$ の分布もまた、同じ型の分布に属することになる。本研究のように正規分布を仮定した場合は、p_{ij} は以下のパラメータをもつ正規分布 $N(\mu_{ij}(\theta), {\sigma_{ij}}^2(\theta))$ となる。

$$\begin{aligned} \mu_{ij}(\theta) &= \theta\mu_i + (1-\theta)\mu_j \\ {\sigma_{ij}}^2(\theta) &= \theta^2{\sigma_i}^2 + (1-\theta)^2{\sigma_j}^2 \end{aligned} \qquad (2)$$

ここでは正規分布の安定性が本質的である。

占有率ランダムの場合のミクセル分布　さらに θ について、区間 [0,1] で一様に (ランダムに) 分布する変数であると仮定しよう。このような仮定はランダム化とよばれる [1]。この場合のミクセル分布 p_{ij} は

$$\begin{aligned} p_{ij}(x) &= \int_0^1 N(\mu_{ij}(\theta), {\sigma_{ij}}^2(\theta)) \cdot 1 \cdot \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi{\sigma_{ij}}^2(\theta)}} \exp\left[-\frac{(x-\mu_{ij}(\theta))^2}{2{\sigma_{ij}}^2(\theta)}\right] \mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

ここで $\mu_{ij}(\theta)$ および ${\sigma_{ij}}^2(\theta)$ は式 (2)と同一である。しかし上式の積分解を解析的な方程式で得ることができないため、本研究では θ を区間 [0,1] で離散的に変化させ、その分布の和として近似解を得た。すなわち $\mathrm{d}\theta \to \Delta\theta = 1/(L-1)$ として、

$$p_{ij}(x) = \sum_{l=0}^{L-1} N(\mu_{ij}(l\Delta\theta), \sigma_{ij}^2(l\Delta\theta)) \cdot \frac{1}{L} \qquad (3)$$

とした。式 (3)で表現されるミクセル分布を図 1に示す。２つのピュアピクセル分布にはさまれ、中心部が平らな特異な形状をしている。この平らな部分が裾の重い分布に対応する部分であると考えられる。

---

*Mixture density estimation under the existence of mixels

[†]*Asanobu KITAMOTO and Mikio TAKAGI*

[‡]*Institute of Industrial Science, University of Tokyo, 7-22-1, Roppongi, Minato-ku, Tokyo 106, Japan*

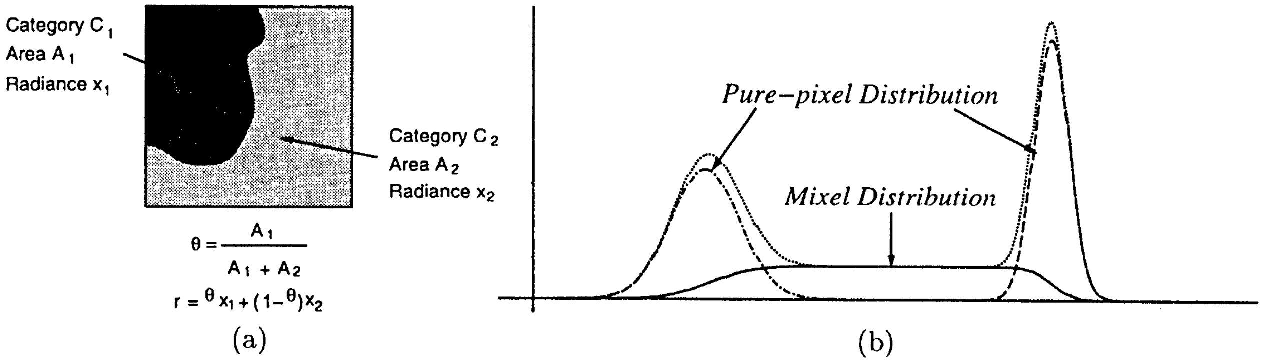

図 1: (a) ミクセルのモデル。(b) ピュアピクセル分布と一般的なミクセル分布の関係。左右の点線がピュアピクセル分布、そして両者にはさまれた実線の分布がミクセル分布である。式 (3) で $L = 30$ とした。

3 混合分布推定

ミクセル分布を含む混合分布推定 本研究では 1 次元の画像ヒストグラムを考え、ヒストグラムから混合分布を推定する問題を扱う。画像中に存在するカテゴリ数を K として、ミクセル分布を含む有限混合分布は以下のように与えられる。

$$p(x|\Phi) = \sum_{i=1}^{K} \alpha_i^P p_i^P(x|\phi_i^P) + \sum_{j=1}^{{}_K C_2} \alpha_j^M p_j^M(x|\phi_k^P, \phi_l^P) \tag{4}$$

ここで M と P はそれぞれ、ミクセル分布とピュアピクセル分布とを指し、またすべての α は非負であり $\sum_{i=1}^{K} \alpha_i^P + \sum_{j=1}^{{}_K C_2} \alpha_j^M = 1$ が成立する。注目すべき点は、ミクセル分布が独自のパラメータを持たないことである。つまりその形状は、ϕ_k^P と ϕ_l^P という 2 個のピュアピクセル分布のみで決定される。

EM アルゴリズム 式 (4) 中のパラメータ Φ を標本を用いて推定する問題は混合分布推定問題と呼ばれ、その問題の解法として用いられるのが EM アルゴリズムである [2]。EM アルゴリズムは、E ステップで期待値を求め M ステップでそれを最大化する処理から構成される。そして特に正規分布の場合は、M ステップでの更新式を陽に与えることができる。一方ミクセル分布の場合は、先述したように独自のパラメータを持たないため、M ステップでの更新式を与える必要がない。そのためミクセル分布を含む混合分布にも EM アルゴリズムを適用可能である。パラメータの初期値推定には、スケールスペース上の 2 次微分のゼロ交差を活用する方法を改良した [3]。

4 結果

気象衛星 NOAA の赤外画像 (チャネル 5) を用いた場合の、正規化ヒストグラムと混合分布推定結果を図 2 に示す。なおカテゴリ数 $K = 3$ は前もって

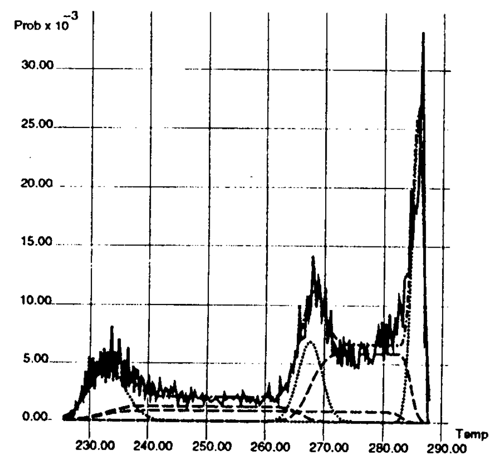

図 2: 正規化ヒストグラムからの混合分布推定。3 個のピュアピクセル分布 (正規分布) と共に、中心部が平らな 3 個のミクセル分布が推定されている。

与えた。まず正規分布のみを用いた推定をおこない、次にミクセル分布を用いた推定をおこなった。するとミクセル分布を用いた場合の方が、裾の重い部分も適切に表現でき良い結果が得られた。そしてこの推定結果を用いて、ベイズの決定則に従った画像の分類をおこなった。以上のように本研究では、ミクセル分布を提案しその有効性を検証した。

参考文献

[1] W. フェラー. **確率論とその応用 II.** 紀伊国屋書店, 1969.

[2] R.A. Redner and H.F. Walker. **Mixture Densities, Maximum Likelihood and the EM algorithm.** *SIAM Review*, Vol. 26, No. 2, pp. 195–239, 1984.

[3] M.J. Carlotto. **Histogram Analysis Using a Scale-Space Approach.** In *CVPR'85*, pp. 334–340, 1985.