並列計算におけるネットワーク・モデルと通信量の関係

1C－7

萩原 斉　中森 眞理雄
東京農工大学工学部 情報工学大講座

1 まえがき

近年，並列計算機がさまざまな分野に普及し，数多くの並列アルゴリズムが提案されている．しかし，それらの並列アルゴリズムの複雑さに関する理論的解析は，時間複雑度に関する考察が主題となり，通信量に関する考察はあまりなされていない場合が多い．この一因には，計算に際して必要となる通信量が，その際に用いる並列計算機におけるネットワーク・モデルによって異なることが挙げられると考えられる．

そこで，本稿では，最短路問題を例に，同問題を解く際に用いる並列計算機におけるネットワーク・モデルと，その際に必要となる通信量や通信回数などの通信コストとの関係について考察する．

2 諸定義及びアルゴリズム

2.1 諸定義

求めるのは，無向グラフ $G=(V,E)$ における $s\in V$ から $g\in V$ への最短路である．グラフ G は $n\times n$ の隣接行列 A によって与えられ，最大次数が k，任意の二節点間の距離が 1 のグラフである．

使用するPE (Processing Element) は n 台である．各PEは，n 個の節点と一対一に対応し，十分なローカル・メモリだけを持ち共有メモリは持たない．初期状態では，節点 s に対応するPEにのみデータDT（隣接行列 A，節点 g）が与えられる．

m 個のデータ $d_1,d_2,\ldots,d_m$ を，1 対 m のPE間で通信する場合の通信量を $\sum_{i=1}^{m} d_i$，通信回数を m とし，異なる m 組のPE間で通信する場合の通信量を $\max_{i=1}^{m} d_i$，通信回数を 1 とする．

次に示すアルゴリズムSPにおいては，アルゴリズム実行中のPEに対応する節点を v で表し，解を格納するためのリストを解リストと呼ぶ．なお，PE間の同期は，各 $\star$ 印において取られる．

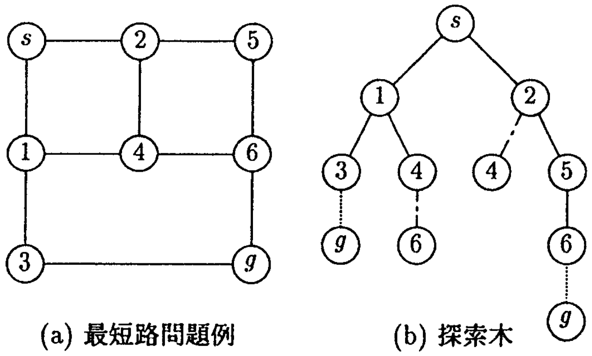
2.2 アルゴリズムSP (Shortest Path)

```
begin
  if DTを持っていない then
    begin
      CD(Check Data)が送られてくるまで待つ*1;
      最初に送られてきたCDの送信元にDTを受理
      する旨を表す“Yes”を返信し，その他のCDの
      送信元には“No”を返信する*2;
      “Yes”を返信したPEからDTを受信する*3
    end;
  U = {u | vに隣接する節点};
  if g ∈ U or U = ∅ then
    begin
      if g ∈ U then 解リスト := {v, g}
               else 解リスト := nil;
      if v ≠ s then 解リストを呼出元に返信する;
      終了;
    end
  for u ∈ U do
    uに対応するPEにCDを送信する*1;
  CD送信先からの返信(“Yes” or “No”)または他の
  PEからのCDを待つ*2;
  if CDが送られてきた then “No”を返信する;
  “Yes”を返信してきたPEにDTを送信する*3;
  DT送信先からの返信（解リスト）または他のPE
  からのCDを待つ;
  if CDが送られてきた then “No”を返信する;
  if 返信されてきたすべての解リスト = nil
    then 解リスト := nil
    else 解リスト := v + 最初に返信されてきた解
                   リスト;
  if v ≠ s then 解リストを呼出元に返信する;
  終了;
end;
```

3 通信コスト

本節では，アルゴリズムSPに従って最短路問題を解く場合の，並列計算機械におけるネットワーク・モデルと通信コストとの関係について考察する．

Relation between Network Model and Communication Cost in Parallel Algorithms,
Hitoshi HAGIWARA and Mario NAKAMORI,
Tokyo A&T University,
2-24-16 Nakamachi, Koganei, Tokyo 184, Japan.



(a) 最短路問題例　　(b) 探索木

図 1　最短路問題例及び探索木

まず初めに，例として，図 1 の(a)に示す例題をアルゴリズムSPに従って解く場合に生成される探索木を同図の(b)に示す．

ここで，(b)の探索木中における実線は，両端の節点に対応するPE間でCD, "Yes",DTが通信されたことを表し，一点鎖線は，CD, "No" が通信されたことを表している．また，点線は，接続の確認が取られただけで，通信が行われなかったことを表している．

このように考えると，本稿では問題となるグラフ G の最大次数を k としていることから，ある問題を解いたことによって生成される探索木が，条件

- すべての枝が実線である．
- 根だけは k 個の子を持ち，他の節点（葉以外）は $k-1$ 個の子を持つ．
- 幾つかの葉にのみ節点 g が点線で接続されている．

をすべて満たすとき，その問題を解くための通信量は最大になる．また，そのような探索木の深さは $2+\lceil\log_{k-1}\frac{n-k-1}{k}\rceil$ であり，更に，CD,DT,解リストの通信量はそれぞれ $O(1), O(n^2), O(n)$ であることから，ある問題を解くための最大通信コストは，

$$\text{通信量}\,O(n^2\log n),\ \text{通信回数}\,O(\log n) \qquad \text{(i)}$$

になる．

但し，ここで示した通信コストは，すべてのPEが完全結合されていることを前提としたものであり，各PEが他のネットワーク・モデルで接続されている場合の通信コストについては，次のように考える．

各PEが完全結合された状態では，常に任意の2PE間での通信が一回の通信で行えるのに対して，他のネットワーク・モデルで接続された状態では，幾つかのPEを中継して複数回の通信を行う必要が生じる．そこで，各ネットワーク・モデルにおいて，最も遠く離れている2PE間の距離（最大通信距離）及びすべての2PE間の距離の和をその組合せ数で割ったもの（平均通信距離）を考えると，表 1 のとおりになる[1]．

表 1　各ネットワーク・モデルの通信距離

モデル	最大通信距離	平均通信距離
完全結合	1	1
ハイパーキューブ	$\log_2 n$	$\frac{1}{2}\log_2 n$
二分木結合	$2\log_2(n+1)-2$	$\sim 2\log_2 n$
トーラス結合	$\sqrt{n}$	$\sim \frac{\sqrt{n}}{2}$
二次元メッシュ	$2(\sqrt{n}-1)$	$\frac{2\sqrt{n}}{3}$
リング結合	$\frac{n}{2}$	$\frac{n-2}{4}$
線形結合	$n-1$	$\frac{n+1}{3}$

従って，(i)の通信コストに，表 1 に示した最大通信距離及び平均通信距離を乗ずることによって，各ネットワーク・モデルにおける最大通信コスト及び平均通信コストが求まることになる．

4　まとめ

本稿では，最短路問題を例に，問題を解く際に用いる並列計算機におけるネットワーク・モデルと，その際に必要となる通信コストとの関係について考察した．

その結果，表 1 に示したように，各ネットワーク・モデルの通信コストは，完全結合の場合のそれに比べて，最大でそれぞれ $O(\log n), O(\sqrt{n}), O(n)$ 倍にもなることがわかった．なお，表 1 に示した値は，本稿で定義した最短路問題に一切依存しない値であることから，ここで述べた結果は，任意の2PE間で通信が発生する問題すべてに対して適応できるものである．

また，本稿で示したアルゴリズムSPとは異なる手法により，アルゴリズムSPよりも優れた性能の解法を実現するのは容易なことと思われる．しかし，どのようなアルゴリズムに対しても，最大通信コストを必要とするような問題が存在する．つまり，この場合も，表 1 の関係を根本的には崩せないのである．

今後は，最大通信コストを必要とする場合が極めて希になるような，確率的並列アルゴリズムを対象として，ネットワーク・モデルと通信コストとの関係について考察して行きたい．

参考文献

[1] 高橋義造（編）：並列処理機構，MARUZEN Advanced Technology <電子・情報・通信編>，丸善株式会社 (1989).