

## 変形後退オイラー法を用いたスティフ回路の過渡解析

1 C-4

加藤 芳信      大谷 武弘  
福井工業大学 工学部

### 1. まえがき

回路あるいはシステムの動的な解析において状態方程式がよく使われている。状態方程式の解の中に变化の速い成分と遅い成分が同時に存在する時、その系はスティフ(Stiff)であると言われる[1]。計算機を用いたスティフ状態方程式の解法としてGear法が有名である[1]。文献[3]ではスティフ線形状態方程式をGear法よりも短時間で解く解法を、文献[2]を整理する形で提案し、文献[4]ではその解法を変形後退オイラー法(MBE法と略記する)と名付け、線形および区分線形回路の過渡解析へ応用している。

本報告では、MBE法の応用として、線形RLC直列回路に鋸波電圧源を印加する場合の過渡解析を行う。この例題で、時刻 $t=0$ 直後の応答波形だけでなく、電源波形10~10000周期後の応答波形を求めて、MBE法とGear法の精度と計算時間(CPU Time)を比較する。尚、この例題は、鋸波の立ち下がり時に電源電圧が急激に変化するので、Gear法でも解きにくい(計算時間が長い)例である。数値計算は富士通汎用計算機M760/20(1CPU当り約10 MIPS)のFORTRAN 77の倍精度演算による。Gear法による数値計算には、富士通SSL IIのDODGEを使用した[5]。精度比較の基準は、Gear法で相対誤差(EPSR)を極めて小さく指定(1.0D-12)したもので、これを準厳密解と呼ぶ。

### 2. 線形の場合のMBE法の概要[3,4]

一般に線形時間不変回路の状態方程式は

$$\dot{X}(t) = A X(t) + B U(t), \quad X(t_s) = X_0 \quad (1)$$

と表される。但し、 $X(t)$ は状態変数ベクトル、 $U(t)$ は独立電源ベクトル、 $X_0$ は状態変数初期条件ベクトルである。式(1)の解を求めるべき時刻 $t$ の範囲は $t_s \leq t \leq t_e$ である。まず、全積分区間 $t_s \sim t_e$ を $m$ 等分して、各入力電源(独立電源)波形を $m$ 段の折れ

線に近似する。次に、各段を $n$ 等分する。刻み幅は

$$h = (t_e - t_s) / mn \quad (2)$$

である。式(1)の数値解は次式(MBE法)で求められる。

$$X_L = C^n X_{L-1} + Q_D U_{L-1} + R_D U_L \quad (L=1, 2, \dots, m) \quad (3)$$

$$\text{但し, } C = (1 - hA)^{-1} \quad (4)$$

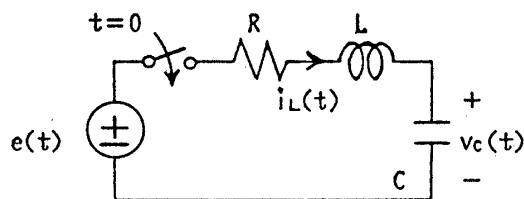
$$\text{であり, } n = 2^i \quad (i: \text{正の整数}) \quad (5)$$

と選べば、 $C^n$ の計算は $i$ 回の行列の乗算となる。尚、各行列の定義は文献[3,4]を参照されたい。

### 3. 鋸波入力の場合の線形RLC直列回路の過渡解析

図1で、電圧源 $e(t)$ を時刻 $t_s=0$ [秒]で印加する。初期条件は $t=0$ で $i_L=0$ [A]、 $v_C=0$ [V]とする。 $t \geq 0$ の $i_L(t)$ と $v_C(t)$ を求める。状態方程式は次式となる。

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L(t) \\ \dot{v}_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} e(t) \quad (6)$$



$$R=0.1[\Omega], L=0.01[H], C=10^{-6}[F]$$

図1. RLC直列回路

図1で、周期 $T=0.01$ [秒]の鋸波電圧源 $e(t)=100 \cdot t_{MP}$  [V] 但し  $t_{MP} = \text{DMOD}(t, 0.01)$  (7) の場合を考える。ここで、DMODは倍精度の剰余関数である。MBE法では、鋸波の立ち下がり時を、極短い時間(これを $\delta$ [秒]とする)で $+1$ [V]から $0$ [V]へ直線的に変化するとし、取り扱わねばならない。式(3)のMBE法を直接適用しようとする、 $\delta$ と式(2)の関係

$$\delta = (t_e - t_s) / m = nh \quad (8)$$

より $n$ を大きく選ばねばならず、計算時間が長くなる。

電源数十~数万周期後の応答波形( $t=t_c \sim t_e$ )を高速に求める為に、電源1周期当たり2つの折れ線で波形を近似する。即ち、次の2つのmodeに分ける。

mode 1:  $0 \leq t_{MP} < T - \delta$  の時、 $e(t)$ は $0$ [V]から $+1$ [V]へ直線的に変化する。

mode 2:  $T - \delta \leq t_{MP} < T$  の時、 $e(t)$ は $+1$ [V]から $0$ [V]へ直線的に変化する。

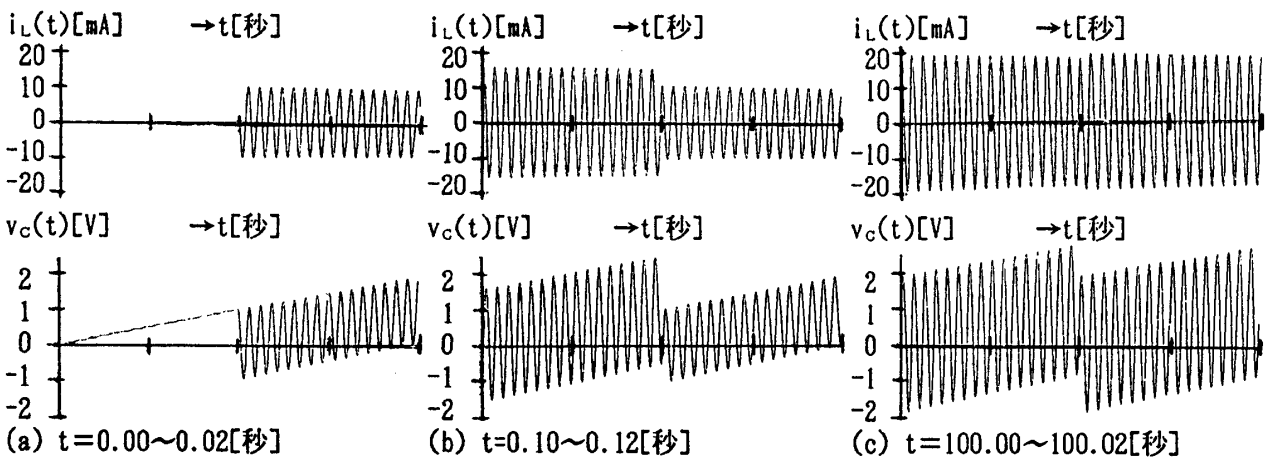


図2. 線形RLC直列回路で鋸波入力の場合の応答波形 (但し, 横軸の1目盛は0.005秒である。)

表1. 線形RLC直列回路で鋸波入力の場合の準厳密解とMBE法及びGear法による数値解

時刻t[秒]	変数	準厳密解		MBE法による数値解		Gear法による数値解	
		最大値	(最小値)	最大値	(最小値)	最大値	(最小値)
(a) 0.00 ~ 0.02	$i_L$ [mA]	10.11420889	(-9.92132101)	10.11422155	(-9.92133005)	10.11417447	(-9.92130722)
	$v_C$ [V]	1.90104248	(-0.96437280)	1.90106753	(-0.96437449)	1.90099018	(-0.96437028)
(b) 0.10 ~ 0.12	$i_L$ [mA]	16.16682813	(-15.92829658)	16.16676949	(-15.92843813)	16.16702489	(-15.92835010)
	$v_C$ [V]	2.48293291	(-1.55457807)	2.48295461	(-1.55458067)	2.48294829	(-1.55459236)
(c) 100.00 ~ 100.02	$i_L$ [mA]	19.44010960	(-19.31340942)	19.43951731	(-19.31249643)	19.43969213	(-19.31300264)
	$v_C$ [V]	2.80799590	(-1.88772003)	2.80807717	(-1.88761290)	2.80795336	(-1.88767864)

$t=t_s \sim t_c$  に対して, MBE法で計算に使う時刻は, 電源1周期につき  $t_{MP}=0$ ,  $t_{MP}=T-\delta$ ,  $t_{MP}=T$  の3つである。各時刻間 (即ち, 各mode) の  $i$  (式(5)参照) をそれぞれ  $i_{s1}$ ,  $i_{s2}$  とし,

$$m_{SPER} = T/\delta \quad (9)$$

とする。各modeにおける行列  $C^n$ ,  $Q_D$ ,  $R_D$  (式(3)参照) を予め計算しておき, 指定の電源周期 (例えば10000周期) まで, mode 1とmode 2を順次繰り返す。こうして高速に, 精度良く求められた  $i_L(t)$  と  $v_C(t)$  の値を, 今度は初期値として, 応答波形を求める時刻  $t=t_c \sim t_e$  に対して  $i_L(t)$  と  $v_C(t)$  を計算すれば良い。この時のmode 1, mode 2における電源波形の分割数を  $m_P$ , 1とし, 式(5)の  $i$  を  $i_{c1}$ ,  $i_{c2}$  とする。図2及び表1に計算結果を示す。(a)~(c)共に  $m_{SPER}=10000000$ , 出力数  $m_C=2*(m_P+1)=2*(400+1)$ ,  $i_{c1}=30, i_{c2}=15$  と指定した。(a)は,  $t=0.00 \sim 0.02$  [秒] を計算した場合で, 精度は5~6桁, CPU Timeは0.18[sec]であった。(b)は,  $t=0.00 \sim 0.10$  [秒] (電源10周期) を  $i_{s1}=38, i_{s2}=15$  として計算し, 更にその結果を初期値として  $t=0.10 \sim 0.12$  [秒] を計算した場合で, 精度は5~6桁, CPU Timeは0.19[sec]であった。(c)は,  $t=0.00 \sim 100.00$  [秒] (電源10000周期) を  $i_{s1}=38, i_{s2}=15$  として計算し, 更に  $t=100.00 \sim 100.02$  [秒] を計算した場合で,

精度は4~5桁, CPU Timeは0.60[sec]であった。

Gear法により同程度の精度で計算した場合 (数値解) のCPU Time, EPSRは, (a)0.72[sec],  $1.0D-7$ , (b)4.34[sec],  $1.0D-8$ , (c)46[min]35.97[sec],  $1.0D-8$  であった。(c)の場合, Gear法による準厳密解および数値解ともに, 実行時にTolerance Resetが起こり, EPSR= $1.0D-7$ に下がっている。尚, Gear法の場合, 初期刻み幅は  $H=1.0D-12$  と指定した。電源100周期後, 1000周期後の応答波形は図2(c)と殆ど同じである。

#### 4. むすび

MBE法は, 線形のスティブ回路の過渡解析に適しており, 電源波形が数百~数万周期終了後の応答波形を求めたい場合でも, 高速に計算できる。

#### 文献

- [1] L.O.Chua and P-M.Lin: Computer-Aided Analysis of Electronic Circuits, Chaps.8-13, Prentice-Hall (1975)
- [2] 喬際岳: “剛性方程の数値求解法”, 中南鉱冶学院学報, No.1, pp.39-46 (1982-03), 及び, No.1, pp.30-37 (1983-03)
- [3] 馬, 加藤, 喬: “スティブ線形状態方程式の一解法”, 信学技報, CAS87-47 (1987-06)
- [4] 加藤, 八木: “変形後退オイラー法によるスティブ回路の過渡解析”, 信学技報, NLP94-71 (1994-12)
- [5] 富士通: FACOM FORTRAN SSL II 使用手引書, 99SP-0050-5, pp.434.1-434.10 (1989-07)