多項式の係数入力誤差に対する根の誤差を減少するための合成関数の利用について
－指数関数使用の場合－

1C－3

田口　功
千葉敬愛短期大学　国際教養科

1．はじめに

前回の報告[1]では，一度求められた根を利用し，多項式の係数が計算機に入力された場合の係数誤差と根の誤差の関係($\varDelta\xi \fallingdotseq (-\varDelta a_n \xi^{n-1} - \varDelta a_{n-1}\xi^{n-2} - \cdots - \varDelta a_2 \xi - \varDelta a_1)/f'(\xi)$)を求め，$\varDelta a_{n-1}$，$\varDelta a_{n-2}$，…，$\varDelta a_2$，$\varDelta a_1$，$\xi$を減少させることにより根の誤差$\varDelta\xi$を減少させる方法を理論的，技術的に示した．$\varDelta\xi$を0に近づける方法を全根の平行移動によって行ない，組立除法を使用する際に$\varDelta a_{n-1}$，$\varDelta a_{n-2}$，…，$\varDelta a_2$，$\varDelta a_1$，の誤差を減少させなければ誤差は変化しないことを示した．

本論文では，多項式の根の誤差と係数入力誤差の関係を応用し，指数関数および一度計算された根に於けるY座標の値（$f(\xi)$)を用い，根の誤差を減少させる方法を提案する．文献[2][3]における多項式の入力係数の変動とそれによって生じる根の誤差の関係式を合成関数的に扱い応用した．指数関数を用い，入力係数誤差によって生じる個々の根の誤差の理論的条件式($\varDelta\xi = ((1-E)/E)*(1/K*f'(\xi))$を求めた．ここで，$E=\exp\left[K*\sum_{k=0}^{n}\varDelta a_{k+1}(\xi)^k\right]$とした(Kは任意の定数)．本関係式を使用し誤差を減少させるための検討を行なった．

2．指数関数を用いた多項式の係数入力誤差による根の誤差

指数関数を用い，多項式の係数変化が生じた場合の一度計算された根ξ_1に於ける多項式の係数変化による根の誤差について考える．

$$F(x)=\exp(K*(x^n + a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_2 x + a_1))-1 \qquad (2\text{-}1)$$

の各係数がわずかに変化した多項式を

$$\overline{F}(x)=\exp(K*(x^n + \tilde{a}_n x^{n-1} + \tilde{a}_{n-1}x^{n-2} + \cdots + \tilde{a}_2 x + \tilde{a}_1))-1 \qquad (2\text{-}2)$$

とする。$F(x)$ の任意の根をξ，これに対応する $\overline{F}(x)$の根を$\bar{\xi}$とする。ここで，$\tilde{a}_{n+1}=a_{n+1}=1$とし，$\varDelta a_{n+1}=0$とする．

$$\varDelta a_{k+1} = \tilde{a}_{k+1} - a_{k+1} \qquad (2\text{-}3)$$

$$\varDelta\xi = \bar{\xi} - \xi \qquad (2\text{-}4)$$

とおくと次式が導かれる．

$$\begin{aligned}
&\overline{F}(\bar{\xi}) = 0\\
&= \overline{F}(\bar{\xi}) - F(\xi)\\
&= \exp\left[K*\sum_{k=0}^{n}\{(a_{k+1}+\varDelta a_{k+1})(\xi+\varDelta\xi)^k\}\right] - \exp\{K*\sum_{k=0}^{n}a_{k+1}\xi^k\}\\
&= \exp\left[K*\sum_{k=0}^{n}\{a_{k+1}(\xi+\varDelta\xi)^k + \varDelta a_{k+1}(\xi+\varDelta\xi)^k\}\right] - \exp\{K*\sum_{k=0}^{n}a_{k+1}\xi^k\}\\
&= \exp\left[K*\{f(\xi+\varDelta\xi)\}\right] * \exp\left[K*\sum_{k=0}^{n}\varDelta a_{k+1}(\xi+\varDelta\xi)^k\right] - \exp\{K*f(\xi)\}\\
&\fallingdotseq \exp\left[K*\{f(\xi+\varDelta\xi)\}\right] * \exp\left[K*\sum_{k=0}^{n}\varDelta a_{k+1}(\xi)^k\right] - \exp\{K*f(\xi)\}
\end{aligned}$$

A method of improvement for the errors by using the exponential function in the numerical computation of polynomials which has input coefficient errors for simple real roots .

Isao Taguchi,Department of International Liberal Arts,Chiba Keiai Junior College

$$=0 \tag{2-5}$$

(2-5)式は，

$$\{F(\xi+\Delta\xi)+1\} * \exp\left[K*\sum_{k=0}^{n}\Delta a_{k+1}(\xi)^{k}\right] - \{F(\xi)+1\} = 0 \tag{2-6}$$

となる．ここで

$$E = \exp\left[K*\sum_{k=0}^{n}\Delta a_{k+1}(\xi)^{k}\right]$$

$$= \exp\left[K*\Delta Y\right] \tag{2-7}$$

とおいた．

(2-6)式は，

$$\{F(\xi+\Delta\xi)+1\} * E - \{F(\xi)+1\} = 0 \tag{2-8}$$

となり，

$$F(\xi+\Delta\xi)*E - F(\xi)*E + F(\xi)*E - F(\xi) = 1 - E \tag{2-9}$$

を考慮し，(2-9)式を整理すると

$$E*F'(\xi)\Delta\xi = (1-E) - (F(\xi)*E - F(\xi))$$

$$= (1-E) + (1-E)*F(\xi)$$

$$= (1-E)(1+F(\xi)) \tag{2-10}$$

となる．従って，指数関数を用いた場合の根の誤差と入力係数誤差との関係は，

$$\Delta\xi \fallingdotseq ((1-E)(1+F(\xi))/(E*F'(\xi)) \tag{2-11}$$

となる．

$$F'(\xi) = K*\exp(K*f(\xi))*f'(\xi) \tag{2-12}$$

の関係があるから，(2-12)式の関係を(2-11)式に代入すると

$$\Delta\xi = ((1-E)/E)*(1/K*f'(\xi))$$

$$= [\ \{1-\exp(K*\Delta Y)/\exp(K*\Delta Y)\}\ ] \ / \ [\ \{K*f'(\xi)\}\ ] \tag{2-13}$$

となる．ここで，$E=K*\Delta Y \fallingdotseq 0$を仮定し，一次近似すると(2-13)式は指数関数を用いない場合の関係と一致する．すなわち係数入力誤差と根の誤差の関係式となる($\Delta\xi = -\Delta Y/f'(\xi)$)．

3．例題　発表時に説明．

4．おわりに

一度計算された根を基としてニュートン法による合成関数使用の根の誤差の検討を行なった．その結果，指数関数を使用する前後で計算される根が$\xi \pm \Delta\xi$となるKが実験てきには存在した．さらに理論的にも明らかになれば誤差の推定ができ有効と思われる．

5．謝辞

本研究にあたり，理論的問題で細かい部分にまで御指導いただいた，東京工業大学美多勉教授に感謝いたします．

6．参考文献

(1)田口功:多項式の係数入力誤差と根の誤差およびその対策,P1-81,第50回(平成7年前期)講演論文集,情報処理学会,1995年

(2)牧乃内三郎，鳥居達生著:数値解析，ｵｰﾑ社，P77-83，P89-90,1988年

(3)田口功:誤差限界式を用いた多項式の数値計算における根の反復誤差改善法，1-131，第49回(平成6年後期)講演論文集，情報処理学会，1994年

(4)伊理正夫著:数値計算，朝倉書店，P129-132，1981年