P区間表とそのプログラミング教育における効果*

7K－1

二村　良彦† 白井　千恵子† 劉　咏梅†† 二村　夏彦‡ 筧　捷彦†
†早稲田大学理工学部　　††武漢大学
‡ School of Computer and Information Science, Syracuse University

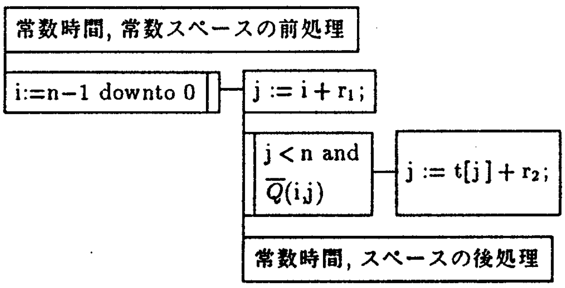
1.　はじめに

数列の区間および数平面上の矩形に関する問題は問題は明解であるが，その効率の良い解法は複雑である．したがって多くの学生はそれらの問題の最適な解法の理解に困難を感じている．

筆者らは，P区間表と呼ばれるデータ構造を提案し，その区間や矩形に関する問題解決の有効性について調査した．本稿ではその教育上の有効性について報告する．なお，P区間表には右区間表と左区間表があるが，ここでは簡便のためP区間表により右P区間表を表すことにする．

2.　最短P区間表

与えられた数列 x の最短P区間表 t とは，数列上の各点 i（$0 \leq i < n$）に対して与えられた関係Pを満足する最小の右端 j（$i \leq j < n$）を対応させた表である．下記に関係Pに対する最短P区間表作成のアルゴリズムをPAD（ISO DIS8631）によって示す．



ここで，r_1, r_2は 0 又は 1 とする．この時 Q が常数時間及びスペースで計算できる関係ならば最短P区間表は $O(n)$ 時間及びスペースで作成できる [5, 6]．次に最短P区間表を用いると容易に解ける問題を記す．

最長素均衡区間 新例題（類題 [3]E55） 均衡区間とは，0 と 1 のみからなる数列（0-1 数列）において，0 と 1 の個数が等しい区間である．素均衡区間とは，均衡区間であって，左右に 2 分割することによって 2 つの均衡区間を得ることができないものをいう．問題は，与えられた 0-1 数列において長さが最大の素均衡区間を $O(n)$ 時間かつスペースで求めることである．例えば，数列<u>110100</u>10 の素均衡区間最大長は 6（下線が引かれた区間の長さ）である．（解答略）

最大区間面積 [9] 区間の面積とは，区間の長さと区間の最小値との積である．問題は与えられた数列に含まれる全ての区間の中で最大面積を持つものを $O(n)$ で求めることである．

本問題に対する解法は最短右P区間表として左端が最小となる区間（以下，左最小区間と呼ぶ），最短左P区間表として右最小区間を作成し，それらを利用し数列の各要素の区間面積の中で最大なものを選べば良い [4, 5].

最大空部分行列 [3]E63 の一般化（類題 [1]） 0 と 1 のみからなる行列（0-1 行列）が与えられたときその空部分行列とは，要素がすべて 0 である部分行列である．問題は与えられた行列に含まれる空部分行列の中で，面積が最大なものを $O(N)$ 時間かつスペースで求めることである（ただし N は行列に含まれる要素数）．

本問題の解法は，与えられた行列に対し，下記に定義する累積表を作成し，累積表の各行に対し最大区間面積を求め，その中から面積が最大なものを選べば良い．なお，累積表が $O(N)$ 時間及びスペースでできることは明かである．

定義 1 M を 0-1 行列とする．この時各 0 要素 M(i,j) から上方に向かう j 列上の 0 の連の長さを A(i,j) とする．また 1 要素に対しては A(i,j)=0 とする．このようにして得られる行列 A を M の累積表と呼ぶ．

最大矩形体積 新例題 矩形とは与えられた行列の部分行列で，矩形体積は矩形の最小値と矩形の面積の積である．問題は，全ての矩形の中で体積が最大なものを求めることである．

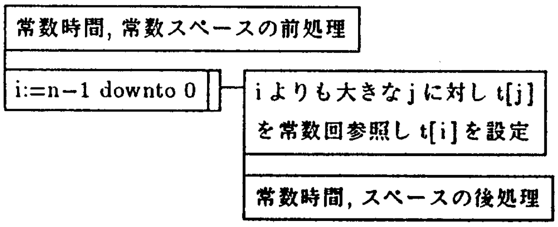
筆者等は本問題に対し，(1) 最大区間面積を利用して最悪 $O(N^{1.5})$ 時間，(2) 上下左右の最小区間表，累積表，最大空部分行列問題を利用して平均 $O(N \log N)$，最悪 $O(N^2)$ 時間の解法 [6] を得た（共に $O(N)$ スペース）（証明略 [2, 8]）．ただし最適解は不明である．

3.　最長P区間表

与えられた数列 x の最長P区間表 t とは，数列上の各点 i（$0 \leq i < n$）に対して与えられた関係Pを満足する最大の右端 j（$i \leq j < n$）を対応させた表である．下記に関係Pに対する最長P区間表作成のアルゴリズ

*P-Segment Table and its Effectiveness to Programming Education, by Yoshihiko FUTAMURA, Chieko SHIRAI, Yongmei LIU, Natsuhiko FUTAMURA, Katsuhiko KAKEHI, School of Science & Engineering, Waseda University, Wuhan University

ムを PAD によって示す.



この時反復の中が常数時間, スペースで計算可能ならば最長 P 区間表は $O(n)$ 時間, スペースで計算できる. 次の 3 問題は最長 P 区間表を利用して解ける.

均衡区間最大長 [3]E55 均衡区間とは, 0-1 数列が与えられたとき, 0 と 1 の個数が等しい区間である. 問題は均衡区間の中で長さが最大なものを求めることである. 例えば, 数列11010010の均衡区間最大長は, 8 (下線が引かれた区間の長さ) である (解答略).

k 区間最大長 [3]E62 k 区間とは, 0-1 数列と整数 k ($k \geq 0$) が与えられたとき, 0 を高々k 個含む区間である. 問題は, k 区間の中で長さが最大なものを求めることである. ただし, 数列の各要素を 1 回しか参照してはならない. 例えば, 数列10100100, $k = 3$ の k 区間最大長は 6 (下線が引かれた区間の長さ) である (解答略).

最長平区間 [7] 平区間とは, 最大値と最小値の差が長さ以下の区間である. 問題は与えられた数列に含まれるすべての平区間の中で長さが最大になるものを求めることである. 例えば, 数列 6, 2, 3, 1の平区間最大長は, 3 (下線が引かれた区間の長さ) である.

筆者等は本問題に対し与えられた数列が単調の場合について $O(n)$ の解答 [6] を得た. しかし, 一般の数列に対する最適解は不明である.

4. 教育上の有効性と問題点

プログラミング教育上の有効性を調査するために, 学部 2 年生のプログラミング演習において難問として有名な最大空部分行列 ([3]E63) を次の手順で出題した. 最初に P 区間表を作成させた. すると半数の学生が独力で P 区間表を $O(n)$ 時間およびスペースで作成した. 次に最大区間面積を出題した. すると P 区間表を $O(n)$ で作成した学生の多くがこの問題を $O(n)$ 時間およびスペースで解答した. 更に, P 区間表の作成法を指導した後, 最大空部分行列問題を出題した. すると 102 人中 88 人の学生が $O(N)$ 時間およびスペースで解答した. 更により困難な最大矩形体積問題を出題した. すると 21 人の学生が $O(N^{1.5})$ 時間および $O(N)$ スペースで解答できた (ただしこの数字は学生のレポートを採点した結果である). 以上より, 筆者らは P 区間表が区間や矩形に対する問題を解く上で重要なデータ構造であると実感した.

しかし, P 区間表の考え方になれるとより効率の良い解法を見落とす新たな問題点も生じた. 下記の問題がその例である.

最長の左最小区間 [3]E35 左最小区間とは左端が最小値となる区間である. 問題は, 左最小区間の中で長さが最大なものを $O(n)$ 時間かつスペースで求めることである.

本問題は最悪 $(2n-2)$ 回の比較で解答できるが半数の学生が $(3n-2)$ 回の比較で解答した.

5. おわりに

区間や矩形に関する多くの問題に対し P 区間表を利用すると統一的に効率のよい解答が得られることを示した. 従来解答を示されても理解できなかった問題を本稿で述べた教育方法により大半の学生が自力で解答できるようになった. したがって筆者等は区間や矩形に関するプログラミング教育には, データ構造として P 区間表が必要であるという結論を得た.

今後の課題は, 更に P 区間表の適用範囲を調査すること, およびより良いプログラミングの教育法を提案することである.

参考文献

[1] Aggarwal, A. and Suri, S. : Fast Algorithms for Computing the Largest Empty Rectangle, *Proc. of the Third Annual Symposium on Computational Geometry*,(1987) pp278-290

[2] Aho, A.V., Hopcroft, J.E. and Ullman, J.D. : *Data Structures and Algorithms*, Addison-Wesley Reading, Massachusetts, U.S.A.,1983.

[3] Dijkstra, E.W. and Feijen, W.H.J. : *A method of programming*, Addison-Wesley Reading, Massachusetts, U.S.A.,1988.

[4] 二村, 二村, 筧 : 対称ヒープの実現とその応用, 情報処理学会アルゴリズム研究会 28-7, 1992 年 7 月.

[5] 二村, 二村, 筧 : 最長区間表とその応用, 日本ソフトウェア科学会第 10 回大会, B9-3,1993.

[6] 二村, 白井, 劉, 二村, 筧 : ダイクストラの演習問題の系統的解決法, ソフトウェア科学会第 11 回大会, C1-3,1994.

[7] 筧捷彦 : プログラミング演習A, 早稲田大学理工学部情報学科講義,1991.

[8] Knuth, D.E. : *The Art of Computer programming*, Vol.3 : Sorting and Searching, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, U.S.A.,1973.

[9] van der Woude : Rabbitcount := Rabbitcount − 1, in J.L.A. van de Snepscheut, Editor, Mathematics of Program Construction, LNCS375, Springer-Verlag, 1989, pp409-420