1J－6

様相論理の Dempster-Shafer 理論に基づくモデルと Kripke モデルとの関係*

村井哲也† 北海道教育大学函館校
宮腰政明‡ 北海道大学工学部
新保 勝§ 北海道大学工学部

1 序論

本稿では Dempster-Shafer 理論 (以下,D-S 理論)[4] における belief 関数や plausibility 関数に基づく信念様相論理のモデル [2, 3] と有限 Kripke モデル (cf.[1]) との関係について論じる.Belief 関数に基づく信念演算子は Kripke モデルの到達可能関係によって解釈できる. 逆に, 任意の Kripke モデルに対して, その到達可能関係が定める様相演算子を生成する belief 関数, したがって, 基本確率割当は一意には決まらない. 基本確率の与え方によって, それが生成する plausibility 関数が定める演算子は可能性または必然性に対応する.

2 様相論理の D-S 理論に基づくモデル

各世界 wごとに W上の基本確率割当を持つモデルを様相論理の D-S モデルと呼ぶ [3]. このモデルは, 同一の基本確率割当 bpa_wが生成する belief 関数 Bel_wと plausibility 関数 Pl_wに基づく二種類の信念演算子を同時に持つ多重様相論理のモデルである.Bel_wと Pl_wの値はそれぞれ, 文の確実性ともっともらしさの程度である. よって, 対応する演算子は強弱二種の信念 (確信と単なる信念) を表現するとみなし, それぞれ,C と B で表わす. 形式的には,D-S モデルとは,$\mathcal{M} =< W, BPA, v >$のことである. ここで,$W$は可能世界の有限集合,$BPA = \{bpa_w\}_{w \in W}$は各世界ごとに定義された基本確率割当 bpa_wの族,vは付値関数である. このモデルにおいて, 二つの様相演算子を次のように定義する:

$$(1) \models_w^{\mathcal{M}} \mathbf{C}p \Leftrightarrow Bel_w(\|p\|) = 1, \qquad (2) \models_w^{\mathcal{M}} \mathbf{B}p \Leftrightarrow Pl_w(\|p\|) = 1.$$

二つの様相演算子 **C** と **B** はそれぞれ体系 KD と EMNP の演算子であることは既に証明した [3]. 特に, 基本確率割当が確率または可能性測度を生成するとき,**C** と **B** の間にそれぞれ,$\models^{\mathcal{M}} \mathbf{C}p \leftrightarrow \mathbf{B}p$, または,$\models^{\mathcal{M}} \mathbf{C}p \leftrightarrow \neg\mathbf{B}\neg p$ なる同値式が成立する. 次章では,

$$wRw' \Leftrightarrow w' \in \cap\{X \mid Bel_w(X) = 1\}$$

で定義される到達可能関係 Rを利用して, 確信演算子 **C** を

$$\models_w^{\mathcal{M}} \mathbf{C}p \quad \Leftrightarrow \quad \forall w'(wRw' \Rightarrow \models_{w'}^{\mathcal{M}} p)$$

によって規定できる点に注意して, 有限 Kripke モデル $\mathcal{M}_K =< W, R, v >$がどのように D-S モデルに埋め込めるかについて考察する. 混乱を避けるため,Kripke モデルの様相演算子を □ と ◇(= ¬□¬) で表す.$\mathcal{M}_K$

*A Relationship between Dempster-Shafer-Theory-Based Models and Kripke Models for Modal Logic

†Tetsuya MURAI, Hakodate Campus, Hokkaido University of Education, Hakodate 040, Japan
‡Masaaki MIYAKOSHI, Faculty of Engineering, Hokkaido University, Sapporo 060, Japan
§Masaru SHIMBO, Faculty of Engineering, Hokkaido University, Sapporo 060, Japan

の到達可能関係 Rに対して, どのような基本確率割当を構成するかによって,D-S モデルとの関係が明らかになる. ある世界 wから到達可能な世界の集合を W_wと書く:

$$W_w \stackrel{\text{def}}{=} \{w'|wRw'\}.$$

3 Kripke モデルの D-S モデルへの埋め込み

まず,W_wを支持する重みをすべて一元集合に割り当てた場合を考える:

$$bpa_w(X) = \begin{cases} 1/|W_w| & X = \{w\}, w \in W_w \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

これが生成する belief 関数は確率であり, 双対な plausibility 関数とも一致する. この bpa_wが構成する D-S モデル $\mathcal{M}_{DS} =< W, \{bpa_w\}_{w\in W}, v >$に対して, 次の定理が成り立つ.

Theorem 1 (1) $\models_w^{\mathcal{M}_K} \Box p \;\Leftrightarrow\; \models_w^{\mathcal{M}_{DS}} \mathbf{C}p \;\Leftrightarrow\; \models_w^{\mathcal{M}_{DS}} \mathbf{B}p$

(2) $\models_w^{\mathcal{M}_K} \Diamond p \;\Leftrightarrow\; \models_w^{\mathcal{M}_{DS}} \neg\mathbf{C}\neg p \;\Leftrightarrow\; \models_w^{\mathcal{M}_{DS}} \neg\mathbf{B}\neg p$

Proof. (1) $\models_w^{\mathcal{M}_K} \Box p \Leftrightarrow W_w \subseteq \|p\| \Leftrightarrow \Sigma_{X\subseteq\|p\|} bpa_w(X) = 1 \Leftrightarrow Bel_w(\|p\|) = 1 \Leftrightarrow \models_w^{\mathcal{M}_{DS}} \mathbf{C}p$.

(2) $\models_w^{\mathcal{M}_K} \Diamond p \Leftrightarrow W_w \cap \|p\| \neq \phi \Leftrightarrow \Sigma_{X\cap\|p\|\neq\phi} bpa(X) > 0 \Leftrightarrow Pl_w(\|p\|) > 0 \Leftrightarrow \models_w^{\mathcal{M}_{DS}} \neg\mathbf{B}\neg p$.

次に,W_wを支持する重みをすべて W_w自体に割り当てた場合を考える:

$$bpa_w(X) = \begin{cases} 1 & X = W_w \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

これが生成する D-S モデル $\mathcal{M}_{DS} =< W, \{bpa_w\}_{w\in W}, v >$に対して, 次の定理が成り立つ.

Theorem 2 (1) $\models_w^{\mathcal{M}_K} \Box p \;\Leftrightarrow\; \models_w^{\mathcal{M}_{DS}} \mathbf{C}p \;\Leftrightarrow\; \models_w^{\mathcal{M}_{DS}} \neg\mathbf{B}\neg p$

(2) $\models_w^{\mathcal{M}_K} \Diamond p \;\Leftrightarrow\; \models_w^{\mathcal{M}_{DS}} \mathbf{B}p \;\Leftrightarrow\; \models_w^{\mathcal{M}_{DS}} \neg\mathbf{C}\neg p$

Proof. (1) $\models_w^{\mathcal{M}_K} \Box p \Leftrightarrow W_w \subseteq \|p\| \Leftrightarrow \Sigma_{X\subseteq\|p\|} bpa(X) = 1 \Leftrightarrow Bel_w(\|p\|) = 1 \Leftrightarrow \models_w^{\mathcal{M}_{DS}} \mathbf{C}p$.

(2) $\models_w^{\mathcal{M}_K} \Diamond p \Leftrightarrow W_w \cap \|p\| \neq \phi \Leftrightarrow \Sigma_{X\cap\|p\|\neq\phi} bpa(X) = 1 \Leftrightarrow Pl_w(\|p\|) = 1 \Leftrightarrow \models_w^{\mathcal{M}_{DS}} \mathbf{B}p$.

謝辞. 本研究の一部は平成 6 年度文部省科学研究費 (奨励研究 (A)06780293) の援助を受けて行ったものである.

参考文献

[1] B.F.Chellas, *Modal Logic: An Introduction.* Cambridge Univ.Press, 1980.

[2] T.Murai, M.Miyakoshi, M.Shimbo, Measure-Based Semantics for Modal Logics. R.Lowen et al.(eds.), *Fuzzy Logic: State of the Art*, Kluwer, 1993, pp.395-405.

[3] T.Murai, M.Miyakoshi, M.Shimbo, Soundness and Completeness Theorems between the Dempster-Shafer Theory and Logic of Belief. Proc.3rd FUZZ-IEEE(part of IEEE WCCI), 1994, pp.855-858.

[4] G.Shafer, *A Mathematical Theory of Evidence.* Princeton Univ.Press, 1976.