微分幾何構造に基づく曲面変形

4R−2

木村　昌弘　　斎藤　隆文　　新谷　幹夫

NTTヒューマンインタフェース研究所

序論

複雑な曲面形状（例えば、ヒトの身体）は、通常、いくつかのすでにデザインされた曲面形状（例えば、頭、腕、足）を、適当に変形し、つなぎ合わせることにより構成される。機能性や美的理由により、隣接する曲面は滑らかに接続していることが要請される。本報告では、あるデザインされた曲面Mの、次のような曲面M'への、変形写像について考察する：

曲面M'は、すでにデザインされ空間内に配置された曲面M_1, ..., M_Lと、滑らかに接続する（図１を参照、そこではL＝2）。

実際には、曲面Mのこのような変形写像は、有限自由度をもつ変形族Ｆとして計算される。例えば、ベジエやＢスプラインのようなスプライン曲面の場合、境界付近の制御点は滑らかな接続の条件から決定されるが、内部の制御点は自由度として残る。

曲面Mのそのような変形写像のインタラクティブ操作は、変形族Ｆの自由度が増えると、困難になる。したがって、変形族Ｆによって生成される変形曲面の中から、最初に提示する変形曲面として適当な曲面を、選択する技術が要求される。本報告では、曲面Mの変形族Fの中から、次のような変形写像 f_1 を求める問題を議論する：

変形曲面 f_1(M) の形状が、初期曲面Mの形状に、合理的な測度の下で、できるだけ近い。

このような問題は、通常、変形エネルギーによって定式化され、エネルギー最小化問題として解かれる。我々の問題では、変形エネルギーに対して、次のような性質が要請される：

幾何学的性質：変形エネルギーは、曲面の幾何学的構造によって定義されるべきであり、曲面の表現形式に依存するべきではない。また、曲面の全体的な形状と相関のある幾何学的量を、測定しているべきである。

計算的性質：変形族Ｆの中で、その変形エネルギーを最小にする変形写像が、ただ一つ存在するべきであり、かつ、その変形写像が、具体的に計算されるべきである。

初期曲面の全体的形状を反映するような変形曲面の生成を目指した変形エネルギーとして、変形量のL^2ノルムを採用したもの［３］、第１基本量の差異のL^2ノルムと第２基本量の差異のL^2ノルムの和を採用したもの［４］が知られている。前者は、曲面の表現形式に依存せず、我々の計算的性質を満たすが、曲面形状と相関のある幾何学的量を測定していない。後者は、幾何学的解釈（同じ形状）をもち、さらに物理的解釈（弾性膜の変形）をももつが、難しい非線形最適化問題を引き起こす。実際には、この変形エネルギーは、物理的観点から簡

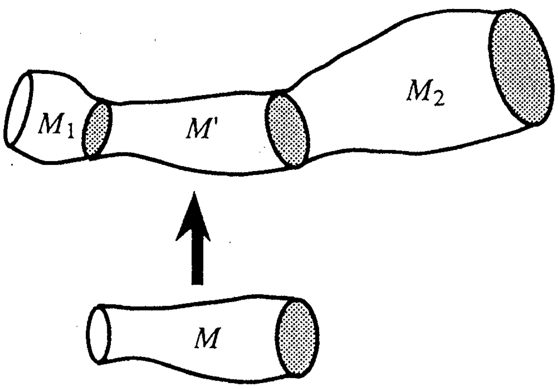

図１：　デザインされた曲面Mとその変形曲面M'；デザインされ配置された曲面M_1, M_2

Surface Deformation with Differential Geometric Structures
Masahiro Kimura, Takafumi Saito, Mikio Shinya
NTT Human Interface Labs.

単化されたり［４］、単に、薄板モデルに類似の変形エネルギーによって代替される［５］。しかしながら、このような簡単化を行うと、変形エネルギーが曲面の表現方法によって異なってしまう、すなわち、その変形エネルギーは、厳密には、幾何学的構造に関係していない。

本報告では、我々の幾何学的性質と計算的性質の両方を満足する変形エネルギーを提案する（詳しくは［２］を参照）。

本論

曲面Mの変形族Ｆに属する変形写像ｆに対して、その変形エネルギー E(f) を次で定義する：

$$E(f) = \|\Delta f - \Delta x\|^2,$$

ここに、ｘはMのR^3への包含写像であり、

$$(X,Y) = \int_M \langle X,Y \rangle \, dA$$

$$\|X\|^2 = (X,X) = \int_M |X|^2 \, dA$$

<,> はR^3の標準計量、△はリーマン多様体（M, <,>）のラプラシアン、dAはその面積要素である（［１］を参照）。

定義から明らかなように、変形エネルギー E(f) は曲面Mの微分幾何構造によって定義されており、曲面の表現形式に依存していない。

平均曲率ベクトルは、曲面の全体的な形状と相関のある幾何学的構造である（［１］を参照）。変形写像ｆが等長写像ならば、変形エネルギー E(f) は、曲面Mの平均曲率ベクトルHと曲面 f(M) の平均曲率ベクトルH'の全体的差異を測定している［２］。

これらの事実から、変形エネルギー E(f) は、曲面の全体的な形状と相関のある、ある幾何学的量を測定していることが結論される。したがって、変形エネルギー E(f)は、我々の幾何学的性質を満足している。

次に、エネルギー汎関数Eが、我々の計算的性質を満足していることを見る。変形族Ｆは、アフィン空間であるので、

$$F = f_0 + F_0$$

と分解される。ここに、f_0は与えられた境界条件（滑らかな接続）を満足する特解で、F_0は境界上で零になるような変形写像からなるベクトル空間の部分空間である。ベクトル空間 F_0 の基底を$\{e_1, \ldots, e_N\}$とする。

図１において、すべての曲面が双３次一様Ｂスプライン曲面であり、曲面Mは制御点網

$$\{P_{ij} | 0 \le i \le m+3, 0 \le j \le n+3\}$$

によって定義され、ｉ方向に閉じているとする。このとき、特解 f_0 は、網Ω以外の網に対応する制御点をＢスプライン曲面M_1, M_2の制御点から決定し、網Ωに対応する制御点を任意に選ぶことによって得られ、ベクトル空間F_0は、網Ωに対応する制御点の操作によって生成される変形写像の集合である。ここに、

$$\Omega = \{(i,j) \in \mathbf{Z}^2 \mid 0 \le i \le m, 3 \le j \le n\}$$

である。また、基底$\{e_1, \ldots, e_N\}$は、網Ωに対応する制御点の操作に関連する双３次一様Ｂスプライン基底関数系から得られる。（詳しくは［２］を参照）。

ラプラシアンのもつ最大値の原理［１］により、変形族Ｆの中で、エネルギー汎関数Ｅを最小にする、曲面Mの変形写像 f_1 は一意的に存在し、次のように具体的に計算される［２］：

$$f_1 = f_0 + \sum_{i=1}^{N} c^i e_i$$

ここに行列計算により、

$$(c^i) = \left((\Delta e_i , \Delta e_j)\right)^{-1}\left((\Delta f_0 - \Delta x, \Delta e_i)\right)$$

である。

ゆえに、エネルギー汎関数Eは、我々の計算的性質を満足している。

参考文献

［１］Gallot et al., Riemannian Geometry, Springer, 1990.

［２］Kimura et al., Surface deformation with differential geometric structures, preprint.

［３］Lott et al., Method for fairing B-spline surfaces, CAD 20, 597-604, 1988.

［４］Terzopoulos et al, Elastically deformable models, CG 21(4), 205-214, 1987.

［５］Welch et al., Variational surface modeling, CG 26(2), 157-166, 1992