4Ｐ－2

誤差限界式を用いた多項式の数値計算における根の反復誤差改善法

田口　功
千葉敬愛短期大学　国際教養科

1．はじめに

多項式の根をパソコンを用い計算する時，誤差が生じる．その誤差には，大きく分けて，多項式を数値計算で求めるための，種々の反復計算法（例えばニュートン法，BIRGE-VIETA法，QR法）それ自身による誤差および，パソコンのハード的な誤差が考えられる．それぞれの反復法を用いて，多項式の根を求める場合，誤差を含んだまま収束する場合もあろう(文献［1］)．係数のわずかな変化があっても，任意の根には影響しない（係数の変化が根の精度に対して鈍感になり，敏感であれば誤差が大きくなる）方法を，文献［2］における誤差限界式を応用し，提案する．従来からIll-condition（たちが悪い）と呼ばれている多項式の根はわずかな係数の変化（誤差）が，根に大きな誤差を生じさせてしまうということが問題になっていた(文献［3］)．本稿では，誤差限界式を応用し，任意の根に対して，根の原点への平行移動により，誤差限界値を0に近づけ，多項式の根を一個づつ精度良く求めることにより，誤差の改善された根を求める方法を提案する．

2．誤差限界式と根の誤差

多項式

$$f(z)=z^n+a_n z^{n-1}+a_{n-1}z^{n-2}+\cdots+a_2 z+a_1 \qquad (2\text{-}1)$$

の各係数がわずかに変化した多項式を

$$\bar{f}(z)=z^n+\bar{a}_n z^{n-1}+\bar{a}_{n-1}z^{n-2}+\cdots+\bar{a}_2 z+\bar{a}_1 \qquad (2\text{-}2)$$

とする．f(z) の任意の根をξ，これに対応する$\bar{f}(z)$の根を$\bar{\xi}$とする。ここで，$\bar{a}_{n+1}=a_{n+1}=1$とし，$\Delta a_{n+1}=0$とする．$\Delta a_{k+1}=\bar{a}_{k+1}-a_{k+1}$，$\Delta\xi=\bar{\xi}-\xi$とおく(k=0～n)．仮定から，

$$\begin{aligned}\bar{f}(\bar{\xi}) &= 0\\ &=\bar{f}(\bar{\xi})-f(\xi)\\ &=\sum_{k=0}^{n}\{(a_{k+1}+\Delta a_{k+1})(\xi+\Delta\xi)^k-a_{k+1}\xi^k\}\\ &=f(\xi+\Delta\xi)-f(\xi)+\sum_{k=0}^{n}\Delta a_{k+1}\bar{\xi}^k\\ &=\sum_{k=1}^{n}f^{(k)}(\xi)\Delta\xi^k/k!+\sum_{k=0}^{n}\Delta a_{k+1}\bar{\xi}^k \qquad (2\text{-}3)\end{aligned}$$

となる。(2-3)式の右辺第2項は，係数の摂動による多項式f(z)の$\bar{\xi}$における摂動と考えられる。そこで，$\Delta f(\bar{\xi}) \triangleq \sum_{k=0}^{n}\Delta a_{k+1}\bar{\xi}^k$と定義すると，多項式の根$\xi$が受ける全体の摂動$\Delta\xi$は，

$$\sum_{k=1}^{n}f^{(k)}(\xi)\Delta\xi^k/k!+\Delta f(\bar{\xi})=0 \qquad (2\text{-}4)$$

を満足しなければならない。多項式の各係数が2進法t桁に丸められ，入力されると考え，$|\Delta a_{k+1}|\leqq 2^{-t}|a_{k+1}|$の関係と，(2-3)式の第1項の２次以上を無視($f'(\xi)\Delta\xi/1!=-\Delta f(\bar{\xi})$)した関係を用いると，相異なる単根の場合には，

A method of iterative improvement for the errors in the numerical computation of polynomials with real and complex roots which is used the limit of error.

Isao Taguchi,Department of International Liberal Arts,Chiba Keiai Junior College

$$|\Delta\xi| \leqq 2^{-t}\sum_{k=0}^{n}|a_{k+1}||\xi|^{k}/|f'(\xi)| \qquad (2\text{-}5\text{-}1)$$

m重根を持つ根に対しては$f'(\xi)=0$, $f^{(2)}(\xi)=0$, …, $f^{(m-1)}(\xi)=0$に注意し整理すると,

$$|\Delta\xi| \leqq 2^{-t/m}\left\{\sum_{k=0}^{n}|a_{k+1}||\xi|^{k}/|f^{(m)}(\xi)|\right\}^{1/m} \qquad (2\text{-}5\text{-}2)$$

の関係が成立する。

ここで，一度根計算が行なわれ誤差を含む近似根$\underline{z_k}$が計算されたと仮定する．(2-5-1)式に対し全根の平行移動($-\underline{z_k}$)を考える．ここで$\underline{z_k}$は任意の一つの根を選択する．平行移動後の誤差限界を$|\underline{\Delta z_k}|$とすると

$$|\underline{\Delta z_k}| \leqq 2^{-t}\{|z_k-\underline{z_k}|^{n}+|a_n||z_k-\underline{z_k}|^{n-1}+|a_{n-1}||z_k-\underline{z_k}|^{n-2}\cdots+|a_2||z_k-\underline{z_k}|+|a_1|\}/|f'(z_k)| \qquad (2\text{-}6)$$

となる．ここで，平行移動によって$|f'(z_k)|$の値は変化しないことに注意し$|z_k-\underline{z_k}|=|\varepsilon|$とおくと

$$|\underline{\Delta z_k}| \leqq 2^{-t}\{|\varepsilon|^{n}+|a_n||\varepsilon|^{n-1}+|a_{n-1}||\varepsilon|^{n-2}\cdots+|a_2||\varepsilon|+|a_1|\}/|f'(z_k)| \qquad (2\text{-}7)$$

となる．εは，真の根と一度計算された根の差であるから非常に小さな値となる．二度目に計算された根に対する誤差限界式の値は一度目より減少する．減少すれば，計算される根の精度は向上するから精度の向上した根に対する平行移動によってさらにこの操作を繰り返せば根の精度は向上することになる．この反復計算によって$|\varepsilon|\fallingdotseq 0$となり，(2-7)式は近似的に

$$|\underline{\Delta z_k}| \leqq 2^{-t}|a_1|/|f'(z_k)| \qquad (2\text{-}8)$$

となる．(2-8)式の右辺の値は(2-5-1)式の右辺と比較すれば明らかに減少するから(特に多項式の係数の絶対値が大きいとき)(2-5-1)式および(2-8)式から

$$|\Delta z_k| \geqq |\underline{\Delta z_k}| \qquad (2\text{-}9)$$

が成立する．したがって，根の反復移動計算により任意の根の精度は改善されることとなる．

3 例題

本例題に対するｼﾐｭﾚｰｼｮﾝは，Macintosh MATLABを使用して行なった．

文献［2］における例題を少しかえ，複素根はないが重根(19)が存在する場合を取り上げる．ここでは，多項式 $\underline{f(x)=(x-20)(x-19)(x-19)(x-17)(x-16)\cdots(x-3)(x-2)(x-1)=0}$ の個々の根の誤差を少なくするために2回の反復平行移動計算を行なって単根はもちろん重根に対しても精度の改善ができることを示す．

```
»A(3,3)=19;
»P=poly(A);
»X0=roots(P)

X0 =

   2.000010533542072e+01
   1.900020710635934e+01 + 2.254364619855954e-02i
   1.900020710635934e+01 - 2.254364619855954e-02i
   1.699666111128294e+01
```

```
»for i=1:5
 HEIRYO=X0(i,1)
 PHi=poly(A-eye(20)*HEIRYO);
 Xi=roots(PHi)+HEIRYC
  HEIRYO2=Xi(20,1)
PHi2=poly(A-eye(20)*HEIRYO2)
Xi2=roots(PHi2)+HEIRYO2
  enc

HEIRYO =

    2.000010533542072e+01
```

```
Xi =
     1.700000000003550e+01
     1.899999986818776e+01
     1.900000013181216e+01
     2.000000000000000e+01

HEIRYO2 =

   2C
Xi2 =

     2.000000000000000e+01
     1.699999999998925e+01
     1.899999977560154e+01
     1.900000022439822e+01
```

4．参考文献

[1] Wilkinson J.H:The Algebraic Eigenvalue Problem,OXFORD,pp.89-90,1988年

[2] 牧之内三郎，鳥居達生:数値解析，オーム社，PP.150-152,1975年

[3] T.R.ﾏｯｶｰﾗ著，三浦功，田尾陽一共訳:計算機のための数値計算法概論，ｻｲｴﾝｽ社，PP.80-93,1972年