ハイブリッド計算のシステム低次元化法への応用

2P−5

甲斐博[†] 岡崎広毅[‡] 野田松太郎[†]
愛媛大学工学部情報工学科[†] ジャストシステム (株)[‡]

1 はじめに

大規模なシステムを設計する場合, そのモデルは高次元になり, 設計や構造が複雑になる. そこで, システムの機能で重要な要素だけに注意し, 特性を保守したまま, システムモデルを簡単化しようというのが「システムモデルの低次元化」である.

伝達関数に対するシステム低次元化の方法は多くあるが, 中でも Padé 近似や Routh 近似が代表的である. 特に,Routh 近似は Padé 近似と比較し低次元化したシステムの安定性を保証できるという特徴がある. しかし, 伝達関数に, システムにほとんど影響を与えない極, 特に [1] では伝達関数の分子と分母の多項式の近似的な共通因子があると良い近似を与えないことが知られている.Padé 近似はこの場合良い近似を与えるが, 近接根の数があらかじめわからないと次数を決めることが出来ない.

一方, 我々は有理関数近似において分母に不必要な特異点 (分子と分母の多項式の近似的共通因子) を近似的 GCD[3] を用いて除去する技法を提案している [2]. 上の問題の場合, その方法がそのまま適用できる. その結果得られる伝達関数はもとのシステムの支配的な特性根の位置を近似する性質の良い伝達関数になる. 本稿では近似的 GCD 算法を用いて低次元化する手順を述べ,Routh 近似や Padé 近似との比較を行いその有効性を述べる.

2 低次元化手法の問題点

次の伝達関数を考える.

例 1

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{100s^2+1100.4s+1001.3003}{s^3+111s^2+1110s+1000} \\
&= \frac{100(s+1.001)(s+10.001)}{(s+1)(s+10)(s+100)} .
\end{aligned}
$$

$G(s)$ の特性は $s=-100$ の極に支配されると考えられる. したがって, 1 次の伝達関数に近似されるなら $s=-100$ に近い極をもつべきである. この伝達関数に対する Padé 近似と Routh 近似を R_p, R_r と書くと, それらは,

$$
\begin{aligned}
R_p(s) &= \frac{90.93}{s+90.83} , \\
R_r(s) &= \frac{0.9019}{s+0.9009}
\end{aligned}
$$

となる. この結果明らかに Padé 近似の方がよい近似を与える. これは Routh 近似が 0 に近い特性根を近似するからである. しかし, 両者とも, もとのシステムの特性根である $s=-100$ からはおおきく離れる.

3 近似 GCD の適用

$G(s)$ のような可制御または可観測の弱い部分を持つシステムに対しては, より直接的な方法も考えられる. それは, 伝達関数の分子と分母の近接する零点と極を近似的な共通因子とみなし, その近似的共通因子を伝達関数から除去する方法である. その結果 Padé 近似や Routh 近似と同じ次数の伝達関数が得られ, 特性根の移動も Padé 近似よりも小さいと期待できる.

$G(s)$ の分子と分母の多項式の近似的 GCD を微小正数 $\epsilon=10^{-1}$ を与えて求めると次の P_k になる.

$$
P_k(s) = s^2+11.0002s+10.0011 .
$$

G の分子分母から P_k を近似除算により取り除いた伝達関数を R_h とする. R_h は次のようになる.

$$
R_h(s) = \frac{100}{s+99.9998} .
$$

この結果, 近似 GCD を適用すると正確にもとのシステムの特性根に非常に近い伝達関数が得られる. したがって Padé 近似より, もとのシステムに近い近似が得られると考えられる.

しかし, 近似 GCD を用いる方法には, 分子と分母の多項式の定数項の比がもとのシステムと一致しないという問題がある. この比は, 伝達関数のステップ応答をもとめた場合, 定常項の大きさになり, 重要である. この解決は G と R_h の係数の比較によって簡単に補正できる.

A Hybrid Computation for Model Reduction,
Hiroshi Kai[†], Hiroki Okazaki[‡], and Matu-Tarow Noda[†],
Department of Computer Science, Ehime University[†],
Just System Co.[‡]

補正を加えたシステムは

$$R_h(s) = \frac{100.108}{s+99.9998}.$$

となる. これを低次元化した伝達関数とする.

以上をまとめると, 次のようになる.

入力 伝達関数 $G(s)=N(s)/D(s)$; 微小正数ϵ

出力 近似 GCD を取り除いた伝達関数

方法

- 1. $N(s)$ と $D(s)$ の近似 GCD をϵを与えて求める.

$$g(s) = \mathrm{ApxGcd}(N(s), D(s), \epsilon).$$

- 2. 求めた近似 GCD を分子と分母から除算により除く.

$$\begin{aligned} R_h(s) &= \frac{N_h(s)}{D_h(s)} \\ &= \frac{N(s)/g(s)}{D(s)/g(s)}. \end{aligned}$$

- 3. $N_h(s)$ の定数項の補正を行う.

$$\begin{aligned} N_\delta &= \mathrm{tc}(D_h)\frac{\mathrm{tc}(N)}{\mathrm{tc}(D)}. \\ R_h(s) &= \frac{N_h(s)-\mathrm{tc}(N_h)+N_\delta}{D_h(s)}. \end{aligned}$$

  ここで,$\mathrm{tc}(P)$ は多項式 Pの定数項を求める関数である.

例 2

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{N(s)}{D(s)}. \\ N(s) &= 8169.13375s^3+50664.96749s^2 \\ &\quad +9984.32343s+500.0. \\ D(s) &= 100.0s^4+10520.0s^3+52101.0s^2 \\ &\quad +10105.0s+500.0. \end{aligned}$$

この有理関数の零点は,

$$x \approx -6.0,\ -0.101 \pm 0.49\times 10^{-5}i.$$

である. また極は,

$$x \approx -100,\ -5,\ -0.1,\ -0.1.$$

にある. つまり, 2 次の多項式が近似的な共通因子と考えられる. これを,Padé 近似と Routh 近似で求めると次の R_p, R_rになる.

$$\begin{aligned} R_p(s) &= \frac{23.18s+2.3596}{s^2+23.75s+2.3596}. \\ R_r(s) &= \frac{0.19357s+0.00969}{s^2+0.19591s+0.00969}. \end{aligned}$$

R_p, R_rの極はそれぞれ,

$$\begin{aligned} x_p &\approx -0.09976,\ -23.65, \\ x_r &\approx -0.04356,\ -0.2456 \end{aligned}$$

であり, 例 1 と同様にもとのシステムと大きく異なる. 近似 GCD で低次元化すると次のようになる.

$$\begin{aligned} R_h(s) &= \frac{81.69s+0.489.7}{s^2+105.0s+489.7} \\ &= \frac{81.69s+489.7}{(s+100.0)(s+4.987)}. \end{aligned}$$

この結果, 得られた伝達関数の極はもとのシステムに近い.

4 まとめ

本稿では, 伝達関数の分子と分母に近接根があると場合に近似 GCD を適用し, もとのシステムに近い特性根を残すという意味で良い低次元モデルを与えることを示した. しかし, 求めた近似 GCD を伝達関数から除く時, 伝達関数が不安定になる場合がある. これは, 多項式の (近似) 除算に起因している. たとえば,

$$\begin{aligned} g(x) &= x+1.005, \\ G(s) &= \frac{x+1.01}{(x+0.001)(x+1)} \\ &= \frac{(x+1.01)/g(x)}{(x+0.001)(x+1)/g(x)} \\ &= \frac{1}{x-0.004}. \end{aligned}$$

これは今後の課題である.

参考文献

[1] Y. Shamash, Failure of the Routh-Hurwitz Method of Reduction, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-25, No.2, 313-314, 1980.

[2] 野田松太郎, 宮広栄一, 甲斐博, 近似的 GCD を用いた有理関数近似, 数理解析研講究録 787, 非線形問題の数値解析, pp.150-162, 1992.

[3] T. Sasaki and M.T. Noda, Apporoximate Square-free Decomposition and Root-finding Ill-conditioned Algebraic Equations, J. Inf. Proc, 12(1989), 159-168.