部分半順序行列における含意を求めるアルゴリズム*

7S－2

○加藤　衛[†]　大内　東[†]

北海道大学工学部[‡]

1. はじめに

本稿では，半順序関係を表す半順序行列の含意構造を明らかにする．また，半順序行列の一般化として未知要素を含む部分半順序行列を定義する．そして，未知要素に値を与えて部分半順序行列を更新するアルゴリズムを提案する．

2. 諸記号・諸定義

本稿で用いる記号を以下に示す．演算はブール代数に従う．

- $N=\{1,2,\cdots,n\}$：システム要素に対応する添字集合．
- R：N 上の二項関係．R は反射性，推移性かつ反対称性を満たすものとする．
- 二値行列 M：関係 R を表す $n\times n$ の正方行列．その (i,j) 要素 m_{ij} の値は，以下で与えられる．

$$\bar{m}_{ij}=\begin{cases}1 : iRj\text{が成り立つ場合}\\0 : iRj\text{が成り立たない場合}\end{cases}$$

- $\bar{M}$：M の否定を表す．その (i,j) 要素 $\bar{m}_{ij}$ は以下のように与えられる．

$$\bar{m}_{ij}=\begin{cases}0: m_{ij}=1\\1: m_{ij}=0\end{cases}$$

- 以下のようなベクトルを定義する．

$c_i=[m_{1i},\cdots,m_{ni}]^T$：第 i 列セルベクトル

$r_j=[m_{j1},\cdots,m_{jn}]$：第 j 行セルベクトル

$c=c_1\circ\cdots\circ c_n$

：$c_1\sim c_n$の連接列ベクトル

$r=r_1\circ\cdots\circ r_n$

：$r_1\sim r_n$の連接行ベクトル

同様に，$\bar{c},\bar{r}$はm_{ij}のかわりに$\bar{m}_{ij}$を用いて定義する．

- 行列のドット積・：行列 A,B の (i,j) 要素をそれぞれ a_{ij},b_{ij} と表すと，$A\cdot B$ の (i,j) 要素を $a_{ij}\times b_{ij}$ とする演算．
- 半順序行列：以下の三式を満たす二値行列．

$$M+I=M \tag{1}$$

$$M^2=M \tag{2}$$

$$M=M\cdot\bar{M}^T+I \tag{3}$$

（Iは単位行列，M^TはMの転置行列）

*An Algorithm for Implication for the Partially Filled Matrix on Partial Ordering

[†]Mamoru KATO and Azuma OHUCHI

[‡]Faculty of Engineering, Hokkaido University

3. 半順序関係の含意構造

半順序行列の定義より，以下の補助定理が導かれる．

補助定理 1　M が半順序行列ならば，すべての i,j,k に対して式 (4), (5) が成り立ち，式 (6) が導出できる．

$$m_{ik}m_{kj}\bar{m}_{ij}=0 \tag{4}$$

$$m_{ij}=m_{ij}\bar{m}_{ji}+\delta(i,j) \tag{5}$$

（$\delta(i,j)$ はクロネッカーのデルタ）

$$(m_{ik}\bar{m}_{ki})(m_{kj}\bar{m}_{jk})\overline{(m_{ij}\bar{m}_{ji})}=0 \tag{6}$$

一般にブール方程式 $xy=0$ は $x\to\bar{y}$ $(y\to\bar{x})$ と等価であるから，式 (6) より，

$$(m_{ik}\bar{m}_{ki})\to\{(m_{kj}\bar{m}_{jk})\to(m_{ij}\bar{m}_{ji})\} \tag{7a}$$

$$(m_{kj}\bar{m}_{jk})\to\{(m_{ik}\bar{m}_{ki})\to(m_{ij}\bar{m}_{ji})\} \tag{7b}$$

$$(m_{ik}\bar{m}_{ki})\to(\ \bar{m}_{ij}\to\bar{m}_{kj}\ ) \tag{7c}$$

$$(m_{kj}\bar{m}_{jk})\to(\ \bar{m}_{ij}\to\bar{m}_{ik}\ ) \tag{7d}$$

$$\bar{m}_{ij}\to\{(m_{ik}\bar{m}_{ki})\to\bar{m}_{kj}\} \tag{7e}$$

$$\bar{m}_{ij}\to\{(m_{kj}\bar{m}_{jk})\to\bar{m}_{ik}\} \tag{7f}$$

を得る．ここで，$A\to(B\to C)$ は，$B=1$ のとき $A=1$ が $C=1$ を含意することを意味する．

式 (7a), (7b) より，

$$\delta(p,q)(m_{ji}\bar{m}_{ij})+\delta(i,j)(m_{pq}\bar{m}_{qp})=1 \tag{8a}$$

が成り立つとき，$(m_{ip}\bar{m}_{pi})$ が $(m_{jq}\bar{m}_{qj})$ を含意することが示される．これを 1－1 含意という．

式 (7c), (7d) より，

$$\delta(p,q)\bar{m}_{ij}+\delta(i,j)\bar{m}_{qp}=1 \tag{8b}$$

が成り立つとき，$(m_{ip}\bar{m}_{qi})$ が $\bar{m}_{qj}$ を含意することが示される．これを 1－0 含意という．

式 (7e), (7f) より，

$$\delta(p,q)(m_{ji}\bar{m}_{ij})+\delta(i,j)(m_{pq}\bar{m}_{qp})=1 \tag{8c}$$

が成り立つとき，$\bar{m}_{pi}$ が $\bar{m}_{qj}$ を含意することが示される．これを 0－0 含意という．

式 (8a), (8b), (8c) を行列で表すと，以下の定理を得る．

定理 1　M が半順序行列ならば，垂直添字集合 $\bar{c}\circ(r^T\bar{c})$，水平添字集合 $\bar{c}^T\circ(r\bar{c}^T)$ とする基本含意行列 Φ が存在し，以下の形で表される．

$$\Phi = \begin{array}{c|cc} & \bar{c}^T & (r\cdot\bar{c}^T) \\ \hline \bar{c} & \Phi_{00} & O \\ (r^T\cdot\bar{c}) & \Phi_{10} & \Phi_{11} \end{array} \tag{9}$$

$$\Phi_{11}^{ij} = \Phi_{00}^{ij} = (m_{ji}\bar{m}_{ij})I + \delta(i,j)M\cdot\bar{M}^T \tag{10a}$$
$$\Phi_{10}^{ij} = \bar{m}_{ij}I + \delta(i,j)\bar{M}^T \tag{10b}$$

含意関係は推移性を満たす．したがって，Φ の推移的閉包によりすべての含意が得られる．Φ の推移的閉包を Ψ とすると，以下の定理が得られる．

定理 2　M が半順序行列ならば，垂直添字集合 $\bar{c}\circ(r^T\bar{c})$，水平添字集合 $\bar{c}^T\circ(r\bar{c}^T)$ である完全含意行列 Ψ が存在し，以下の形で表される．

$$\Psi = \begin{array}{c|cc} & \bar{c}^T & (r\cdot\bar{c}^T) \\ \hline \bar{c} & \Psi_{00} & O \\ (r^T\cdot\bar{c}) & \Psi_{10} & \Psi_{11} \end{array} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{11}^{ij} &= \Psi_{00}^{ij} \\ &= \{\delta(i,j) + (m_{ji}\bar{m}_{ij})\}M\cdot\bar{M}^T \end{aligned}\tag{12a}$$
$$\begin{aligned}\Psi_{10}^{ij} &= \{\delta(i,j) + (m_{ji}\bar{m}_{ij})\}\bar{M}^T \\ &\quad + \bar{m}_{ij}M\cdot\bar{M}^T \end{aligned}\tag{12b}$$

4. 未知数の導入とアルゴリズム

4.1 未知数の導入

この節では二値行列が未知数を含む部分二値行列について考える．

部分二値行列 M を以下のように与える．

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & : iRj\text{が成り立つ場合} \\ 0 & : iRj\text{が成り立たない場合} \\ x_{ij} & : iRj\text{の成否が不明の場合} \end{cases} \tag{13}$$

(x_{ij} は未知数 (ブール変数))

$\bar{M}$ は以下のように定義する．

$$\bar{m}_{ij} = \begin{cases} 0 & : m_{ij} = 1 \\ 1 & : m_{ij} = 0 \\ \bar{x}_{ij} & : m_{ij} = x_{ij} \end{cases} \tag{14}$$

定義 1　部分半順序行列 M とは，以下の無矛盾性と極大性を有する部分二値行列である．

- 無矛盾性：以下の条件を満たす三つ組 (i,j,k) が存在しないことである．
  - (a)　$m_{ij} = m_{ji} = 1$
  - (b)　$m_{ij} = 0,\ m_{ik} = m_{kj} = 1$
- 極大性：任意の未知数 x_{ij} に対して，以下の条件を満たす三つ組 (i,j,k) が存在しないことである．
  - (a)　$m_{ji} = 1$
  - (b)　$m_{kj} = 0,\ m_{ki} = 1$
  - (c)　$m_{ik} = 0,\ m_{jk} = 1$
  - (d)　$m_{ik} = m_{kj} = 1$

部分半順序行列 M のすべての要素が既知であれば，半順序行列である．

4.2 Ψ を求めるアルゴリズム

式 (11), (12a), (12b) を式 (12a), (12b) で置き換えたものを部分半順序行列 M に対しての Ψ と定義する．以下にその Ψ 生成アルゴリズムを示す．

[Ψ 生成アルゴリズム]

部分半順序行列 M に対して，すべての i,j について (a), (b) を行う．

(a) M^T の (i,j) 要素を，$\{\delta(i,j) + (m_{ji}\bar{m}_{ij})\}(M\cdot\bar{M}^T + I)$ で置換し，$\Psi_{11}(\Psi_{00})$ とする．

(b) M^T の (i,j) 要素を，$\{\delta(i,j) + (m_{ji}\bar{m}_{ij})\}\bar{M}^T$ で置換し N_1 とする．また，$\bar{M}$ の (i,j) 要素を，$\bar{\delta}(i,j)\bar{m}_{ij}(M\cdot\bar{M}^T + I)$ で置換し N_2 とする．そして，$N_1 + N_2$ を Ψ_{10} とする．

部分半順序行列 M の未知要素に 1 または 0 を与えたものを，新たに M' とする．その M' に対する新たな Ψ' を求める必要がある．以下に Ψ'を求める更新アルゴリズムを示す．

[Ψ 更新アルゴリズム]

部分半順序行列 M に対して，<ステップ 1>

すべての $(i,j)\in C$ について (a), (b) を行う．

(a) Ψ_{11}^{ji} (Ψ_{00}^{ji}) を $(m_{ij}\bar{m}_{ji})(M\cdot\bar{M}^T + I)$ で置換し，Ψ_{11}^{ji} (Ψ_{00}^{ji}) とする．

(b) Ψ_{10}^{ij} を $(m_{ji}\bar{m}_{ij})\bar{M}^T + \bar{m}_{ij}(M\cdot\bar{M}^T + I)$ で置換して Ψ_{10}^{ij} とし，Ψ_{10}^{ji} を $(m_{ij}\bar{m}_{ji})\bar{M}^T + \bar{m}_{ji}(M\cdot\bar{M}^T + I)$ で置換して Ψ_{10}^{ji} とする．

<ステップ 2>

すべての $(i,j)\in\bar{C}$ について (a), (b) を行う．

すべての $(p,q)\in C$ に対し

(a) Ψ_{11}^{ji} (Ψ_{00}) の (p,q), (q,p) 要素をそれぞれ $\{\delta(j,i) + (m_{ij}\bar{m}_{ji})\}(m_{pq}\bar{m}_{qp})$, $\{\delta(j,i) + (m_{ij}\bar{m}_{ji})\}(m_{qp}\bar{m}_{pq})$ で置換し，Ψ_{11}^{ji} (Ψ_{00}) とする．

(b) Ψ_{10}^{ji} の (p,q) 要素を $i\neq j$ のとき，$(m_{ij}\bar{m}_{ji})\bar{m}_{qp} + \bar{m}_{ji}(m_{pq}\bar{m}_{qp})$ で置換する．また，Ψ_{10}^{ji} の (q,p) 要素を $\{\delta(j,i) + (m_{ij}\bar{m}_{ji})\}\bar{m}_{pq} + \bar{m}_{ji}(m_{qp}\bar{m}_{pq})$ で置換し，Ψ_{10}^{ij} とする．

5. おわりに

本稿では，半順序行列の性質を明らかにし，その含意構造を表す含意行列を示した．また，部分半順序行列を定義し，それを更新するアルゴリズムを提案した．

参考文献

[1] A.Ohuchi, M.Kurihara and I.Kaji : " Implication Theory and Algorithm for Reachability Matrix Model ", IEEE, Vol.SMC-16,No.4 pp.610-616 (1986).