ホモロジー群とホモロジー完全系列の計算過程のアニメーション

7V－4

日置尋久 † 品川嘉久 † 國井利泰 ‡

東京大学 † 会津大学 ‡

1 序論

トポロジーは、物体の大局的な構造を記述する概念であり、パターン認識やCADシステムなどにおいて不可欠なものである。しかしトポロジーは非常に抽象的であり、その本質的な意味をつかむことが困難である。この問題を解決するために、ここではトポロジー的概念の可視化を行なう。

可視化は対象を理解するための手段として非常に有用である。しかしこれまで可視化の対象となっていたのは、ベクトル場や関数の等位面などの概念がほとんどであった。抽象的な概念を可視化したものとして、アルゴリズムの挙動をアニメーションで示すアルゴリズムアニメーション [1] の分野がある。今までアルゴリズムアニメーションでは、ソートやグラフのアルゴリズムのようなものを対象としてきたが、トポロジーの概念はまだ扱われていない。ここでは、代数的トポロジーの中心であるホモロジー理論に関する可視化の手法を提案する。ホモロジー理論では、位相構造をホモロジー群と呼ばれるアーベル群で記述する。我々は、単体的複体 (以降では単に複体と表記する) のホモロジー群の計算過程をアニメーションによって可視化するシステムを実現する。このシステムでは相対ホモロジー群と絶対ホモロジー群との関係を示すホモロジー完全系列の計算と可視化も行なう。

2 単体的複体のホモロジー理論

多面体などの図形は、三角形の集合に分割できる。この分割の三角形どうしのつながり方をみることにより、図形の位相的構造を導くことができる。この考え方を一般化したのが複体のホモロジー群である。直観的にいえば、r 次元ホモロジー群は図形内の r 次元の穴の個数を表すものである。例えば $0, 1, 2$ 次元ホモロジー群はそれぞれ図形内の、連結成分の数、(いわゆる) 穴の数、閉空間の数に対応する。ここで、ホモロジー群について簡単に説明する [3]。

複体のホモロジー群：まず複体 K において、以下の2つの群を考える。

$Z_r(K)$: r 次元のサイクルを数える群

$B_r(K)$: r 次元の中が詰まったサイクルを数える群

r 次元ホモロジー群は商群 $H_r(K) = Z_r(K)/B_r(K)$ で定義され、r 次元サイクル $c \in Z_r(K)$ を代表元とする $H_r(K)$ の元 $[c]$ を c のホモロジー類という。

ホモロジー完全系列：複体の対 (K, L)、準同型 i : $L \to K$, $j : (K, \emptyset) \to (K, L)$, ∂ に関して、系列

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_r(L) \xrightarrow{i_*} H_r(K) \xrightarrow{j_*} H_r(K, L)$$
$$\xrightarrow{\partial_*} H_{r-1}(L) \xrightarrow{i_*} H_{r-1}(K) \xrightarrow{j_*} H_{r-1}(K, L) \cdots$$

が完全系列になる。すなわち各次元において、$\mathrm{Im}\, i_* = \mathrm{Ker}\, j_*$, $\mathrm{Im}\, j_* = \mathrm{Ker}\, \partial_*$, $\mathrm{Im}\, \partial_* = \mathrm{Ker}\, i_*$ が成立する。ただし、$H(L)$ は K の部分複体の L のホモロジー群、$H(K,L)$ は L を 0 とみなして計算される相対ホモロジー群である。

3 ホモロジー群の計算過程の可視化

ホモロジー群 H が Z, B から $H = Z/B$ として求められる過程の可視化について述べる。基本的には、ホモロジー群 (有限生成アーベル群) をその生成系で表現する方向を採る。ここでは、以下の２つの手法で可視化を行なう。

(1) 図形表現

(2) ベクトル表現

手法 (1) では対象を低次元ホモロジー群に限定し、ホモロジー群の概念への導入として利用することを目的にしている。逆に手法 (2) は、高次元ホモロジー群への対応も考慮したものである。

(1) **図形表現**：0 次元ホモロジー群に関しては、Z の各生成元 (複体の頂点) のうちで、B の生成元 (線分) によってつながれているものを一点に変形する過程をアニメーションで表現することにより、連結成分の数が求められる様子を示す (図 1)。また 1, 2 次元ホモロジー群に関しては、Z の各生成元、B の生成元を表示した後に、ある適当なサイクル $c \in Z$ が、B の元を加えた後に B の元を無視することによって、そのホモロジー類の代表元 (Z のある生成元または 0) に変形できることを、B の元を表す図形をつぶしていくアニメーションで表現する (図 2)。

(2) **ベクトル表現**：ベクトルが直線を生成することと生成元が巡回群を生成することの類似性に注目し、有限生成アーベル群をベクトルを用いて可視化する。具体的には、群の生成系のうち自由な部分を平面 $\boldsymbol{R}^2$ 上のベクトルで表現し、捻れ部分を射影平面 $\boldsymbol{RP}^2$ 上のベクトル

Algorithm Animation of Homology Groups and Exact Sequences
Hirohisa Hioki†, Yoshihisa Shinagawa†, and Tosiyasu L. Kunii‡
The University of Tokyo†, The University of Aizu‡

として表現する。 RP^2 においては、ある $m \in Z$ に対して $mx = o$ なるベクトル x が常に存在するので、任意の有限位数の生成元を表現することができる [2]。

H が Z/B として得られることを示すのに、まずこの表現を用いて Z, B, H の各群を可視化する。次に Z の各生成元が、 B の生成元を加えた後に B の元を無視することにより、その代表元に変形できることを、 B の元を表すベクトルを o につぶしていくアニメーションで表現する (図 3)。

4 ホモロジー完全系列の可視化

ホモロジー完全系列を用いて、部分複体のホモロジー群 $H(L)$ と相対ホモロジー群 $H(K,L)$ とから絶対ホモロジー群 $H(K)$ を求める過程の可視化を行なう。完全系列は円板 (群を表す) とそれらをつなぐ線分 (準同型を表す) とを用いて可視化される。ここで $\cdots \longrightarrow G_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} G_i \xrightarrow{f_i} G_{i+1} \longrightarrow \cdots$ を完全系列とする。例えば、 f_{i-1} のドメイン G_{i-1} は、その像を表す G_i 内の円板と線分でつながれる。また完全系列の性質から、これは同時に $\mathrm{Ker}\, f_i$ を表す円板であり、 G_{i+1} の単位元を表す点に線分でつながれる。ある準同型の Im , Ker を表す円板の大きさは、その準同型の性質 (単射、全射など) によって決められる。

この表現を用いて、ホモロジー完全系列のアニメーションを行なう。まず各次元で $H(L), H(K,L)$ を計算し、その時点で得られている情報によって完全系列を描く。次に 0 次元から順に写像 ∂_* の Im, Ker を計算し、新たに得られた情報により完全系列を更新し、アニメーションによって変形を行なう。またこの過程で、 $H(K)$ が決定されていく様子も示す (図 4)。

5 結論

複体のホモロジー群の計算過程とホモロジー完全系列をアニメーションによって可視化するシステムを実現した。今後は、高次元ホモロジー群のさらに直観的な可視化について考察し、またユーザインタフェースなどの充実をはかり、 CAI システムとしての完成度を高めていく予定である。

参考文献

[1] Brown, M. H., *Algorithm Animation*. MIT Press, 1988.

[2] Kunii, T. L., H. Hioki, and Y. Shinagawa, "Visualizing Highly Abstract Mathematical Concepts: A Case Study in Animation of Homology Groups," in *MULTIMEDIA MODELING*, pp. 3–30, 1993.

[3] Munkres, J. R., *Elements of Algebraic Topology*. Addision-Wesley, 1984.

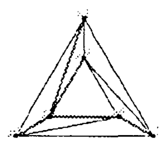

図 1: 0 次元ホモロジー群のアニメーション

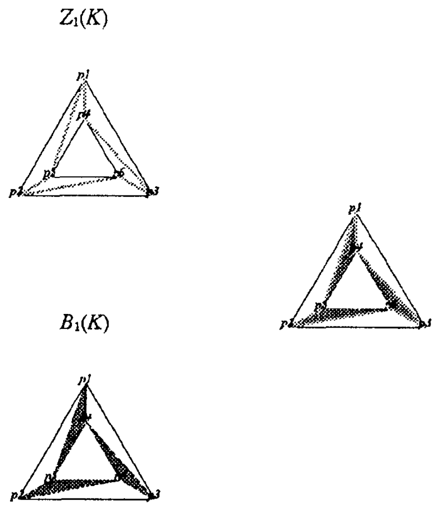

図 2: 1 次元ホモロジー群のアニメーション

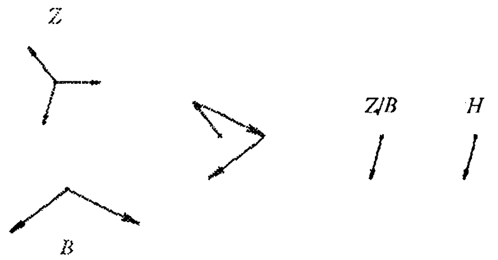

図 3: ベクトル表現によるホモロジー群のアニメーション

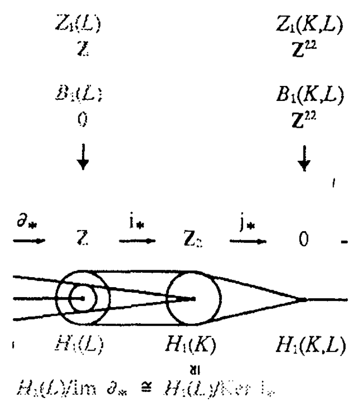

図 4: ホモロジー完全系列のアニメーション