漸化式を用いる積分 $\int_0^x J_\nu(t)/t\,dt$ の数値計算法の誤差解析

山本徹志[†] 吉田年雄[††]

積分 $\int_0^x J_\nu(t)/t\,dt$ ($J_\nu(t)$: 第1種ベッセル関数) は，$J_{\nu+2k+1}(x)\,(k=0,1,\cdots)$ を用いて $\int_0^x J_\nu(t)/t\,dt = 2/(\nu x)\sum_{k=0}^{\infty}(\nu+2k+1)J_{\nu+2k+1}(x)$ $(\nu>0)$ のように表すことができる．漸化式を用いる方法で求められた $J_{\nu+2k+1}(x)$ の計算値を上式の有限項で打ち切ったものに代入することにより，$\int_0^x J_\nu(t)/t\,dt$ を計算することができる．本論文では，その計算法の誤差解析を行い，誤差の表示式および誤差の評価式を与えている．

Error Analysis of Recurrence Technique for the Calculation of Integral of $\int_0^x J_\nu(t)/t\,dt$

TETSUJI YAMAMOTO[†] and TOSHIO YOSHIDA[††]

The integral $\int_0^x J_\nu(t)/t\,dt$ ($J_\nu(t)$: Bessel Functions of the first kind) can be expressed by $\int_0^x J_\nu(t)/t\,dt = 2/(\nu x)\sum_{k=0}^{\infty}(\nu+2k+1)J_{\nu+2k+1}(x)$ $(\nu>0)$. Truncating the series after some k and applying a recurrence technique to calculate $J_\nu(x)$, we can obtain the approximation to $\int_0^x J_\nu(t)/t\,dt$. In this paper, we give an error estimation of this approximation.

1. はじめに

漸化式を用いる ν 次の第1種ベッセル関数 $J_\nu(t)$ の積分 $\int_0^x J_\nu(t)dt$ の数値計算法とその誤差解析は，すでに吉田[1)]によって報告されている．ここでは，それを $\int_0^x J_\nu(t)/t\,dt$ に応用し，その数値計算法の誤差解析を行っている．

$\int_0^x J_\nu(t)/t\,dt$ は，$J_{\nu+2k+1}(x)\,(k=0,1,\cdots)$ を用いて，次式のように表すことができる[2)]．

$$\int_0^x \frac{J_\nu(t)}{t}dt = \frac{2}{\nu x}\sum_{k=0}^{\infty}(\nu+2k+1)\,J_{\nu+2k+1}(x) \quad (\nu>0) \qquad (1)$$

漸化式を用いる方法で求められた $J_{\nu+2k+1}(x)\,(k=0,1,\cdots)$ の計算値を上式に代入することによって，$\int_0^x J_\nu(t)/t\,dt$ を計算することができる．

以下では，ν を実数 $(\nu>0)$ とし，x を実数 $(x\geq 0)$ とする．ν を実数 μ $(\mu>0)$ と整数 n との和として，

$$\nu=\mu+n \qquad (2)$$

と表す．また，m を適当に選ばれた偶整数 $m\ (>n)$ とし，α を小さな任意定数とする．

$F_{\mu+m+1}(x)=0$, $F_{\mu+m}(x)=\alpha$ を出発値として，$J_\mu(x)$ が満足する漸化式

$$F_{\mu-1}(x)=\frac{2\mu}{x}F_\mu(x)-F_{\mu+1}(x) \qquad (3)$$

を繰り返し用いることにより，$F_{\mu+m-1}(x), F_{\mu+m-2}(x), \cdots, F_\mu(x)$ を求める．これらを使うことにより，ベッセル関数 $J_{\mu+i}(x)\,(i=0,1,2,\cdots,m-1)$ の計算式は次式で表される．

$$J_{\mu+i}(x)\approx\frac{F_{\mu+i}(x)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{m/2}\varepsilon_k(\mu)F_{\mu+2k}(x)} \qquad (4)$$

ただし，

$$\varepsilon_k(\mu)=\left(\frac{x}{2}\right)^{-\mu}\frac{(\mu+2k)\Gamma(\mu+k)}{k!} \qquad (5)$$

である．

式 (1) の右辺の和を，漸化式 (3) によって求めた項を用いて求めれば，

† 中部大学大学院経営情報学研究科
Graduate School of Business Administration and Information Science, Chubu University
†† 中部大学経営情報学部経営情報学科
College of Business Administration and Information Science, Chubu University

$$\int_0^x \frac{J_\nu(t)}{t}dt \approx \frac{2}{\nu x}\sum_{k=0}^{[(m-n)/2]}(\nu+2k+1)J_{\nu+2k+1}(x) \quad (6)$$

と表される．上式に，式 (4) の右辺を代入すれば，$\int_0^x J_\nu(t)/t\,dt$ の計算式は次のように求められる．

$$\int_0^x \frac{J_\nu(t)}{t}dt \approx \frac{2}{\nu x}\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{[(m-n)/2]}(\nu+2k+1)F_{\nu+2k+1}(x)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{m/2}\varepsilon_k(\mu)F_{\mu+2k}(x)} \quad (7)$$

本論文では，上の計算法の誤差解析を行い，計算式の誤差の表示式および評価式を導出している．文献 1) では，n が奇数の場合の誤差の評価式を簡単な形で表すことができず，実用に役立つ誤差の評価式は得られなかった．この論文では，n が奇数の場合の誤差の評価式も，ある公式を適用すれば，簡単な評価式で表すことができることを示している．さらに，その公式を文献 1) に適用すれば，n が奇数のとき複雑であった評価式が，本論文と同様簡単な評価式で表すことができるので，その評価式の導出法を付録に示す．

2. 誤差解析

$J_{\mu+i}(x)$ と，その計算式である式 (4) の右辺の間の関係式は，文献 1) により，

$$J_{\mu+i}(x) = \frac{F_{\mu+i}(x)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{m/2}\varepsilon_k(\mu)F_{\mu+2k}(x)}(1-\Phi_{\mu,m}(x)) + \frac{J_{\mu+m+1}(x)Y_{\mu+i}(x)}{Y_{\mu+m+1}(x)} \quad (8)$$

と表される．ただし，

$$\Phi_{\mu,m}(x) = \left(\sum_{k=0}^{m/2}\varepsilon_k(\mu)\frac{J_{\mu+m+1}(x)Y_{\mu+2k}(x)}{Y_{\mu+m+1}(x)} + \sum_{k=m/2+1}^{\infty}\varepsilon_k(\mu)J_{\mu+2k}(x)\right) \quad (9)$$

である．

式 (1) と式 (8) から次式を得る．

$$\int_0^x \frac{J_\nu(t)}{t}dt = \frac{2}{\nu x}\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{[(m-n)/2]}(\nu+2k+1)F_{\nu+2k+1}(x)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{m/2}\varepsilon_k(\mu)F_{\mu+2k}(x)}\cdot(1-\Phi_{\mu,m}(x)) + \frac{2}{\nu x}\frac{J_{\mu+m+1}(x)}{Y_{\mu+m+1}(x)}\cdot\sum_{k=0}^{[(m-n)/2]}(\nu+2k+1)Y_{\nu+2k+1}(x) + \frac{2}{\nu x}\sum_{k=[(m-n)/2]+1}^{\infty}(\nu+2k+1)J_{\nu+2k+1}(x) \quad (10)$$

それゆえ，式 (7) の右辺によって，10 進 p 桁の精度で $\int_0^x J_\nu(t)/t\,dt$ が計算できるためには，

$$|\Phi_{\mu,m}(x)| < 0.5\times 10^{-p} \quad (11)$$

および

$$|\Psi_{\mu,m,n}(x)| < 0.5\times 10^{-p} \quad (12)$$

が成り立てばよい．ただし，

$$\Psi_{\mu,m,n}(x) = \frac{1}{\displaystyle\int_0^x \frac{J_\nu(t)}{t}}\left(\frac{2}{\nu x}\frac{J_{\mu+m+1}(x)}{Y_{\mu+m+1}(x)}\cdot\sum_{k=0}^{[(m-n)/2]}(\nu+2k+1)Y_{\nu+2k+1}(x) + \frac{2}{\nu x}\sum_{k=[(m-n)/2]+1}^{\infty}(\nu+2k+1)J_{\nu+2k+1}(x)\right) \quad (13)$$

である．

式 (7) の相対誤差 $\Delta_{\mu,m,n}(x)$ は式 (10) から，

$$\Delta_{\mu,m,n}(x) = \frac{\Phi_{\mu,m}(x)-\Psi_{\mu,m,n}(x)}{1-\Phi_{\mu,m}(x)} \quad (14)$$

と表される．ここで，$|\Phi_{\mu,m}(x)| \ll 1$ ならば，

$$\Delta_{\mu,m,n}(x) \approx \Phi_{\mu,m}(x)-\Psi_{\mu,m,n}(x) \quad (15)$$

となる．

3. $\Phi_{\mu,m}(x)$ の変形と評価式

式 (9) で表される $\Phi_{\mu,m}(x)$ は，文献 1) により次のように変形されることが分かる．

$$\Phi_{\mu,m}(x) = \left(\sum_{k=0}^{m/2}\varepsilon_k(\mu)\frac{J_{\mu+m+1}(x)Y_{\mu+2k}(x)}{Y_{\mu+m+1}(x)}\right.$$

$$1-\sum_{k=0}^{m/2}\varepsilon_k(\mu)J_{\mu+2k}(x)\Bigg)$$

$$=\Bigg[\frac{-1}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\mu-m-1}$$

$$\cdot\sum_{k=m/2+1}^{m}\frac{\Gamma(\mu+m-k+1)}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

$$+\left(\frac{x}{2}\right)^{m+1}\Bigg\{\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu}\cos\mu\pi$$

$$\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{2k}}{k!\Gamma(\mu+m+k+2)}$$

$$-\left(\frac{x}{2}\right)^{-\mu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{2k}}{(m+k+1)!\Gamma(-\mu+k+1)}\Bigg\}$$

$$\Bigg/\sin\mu\pi\Bigg]\Bigg/Y_{\mu+m+1}(x) \qquad (16)$$

上式において，$\mu+m/2\gg x/2$ ならば，[ ] の第 1 の部分の $k=m/2+1$ が主要項であるので，$\Phi_{\mu,m}(x)$ の評価式は

$$\Phi_{\mu,m}(x)\approx\frac{-\Gamma(\mu+m/2)}{\pi Y_{\mu+m+1}(x)(m/2+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\mu+1} \qquad (17)$$

と表される．

4. $\Psi_{\mu,m,n}(x)$の変形

式 (13) で表される $\Psi_{\mu,m,n}(x)$ を変形する．

$$\Psi_{\mu,m,n}(x)$$

$$=\frac{1}{\int_0^x\frac{J_\nu(t)}{t}dt}\Bigg(\frac{2}{\nu x}\frac{J_{\mu+m+1}(x)}{Y_{\mu+m+1}(x)}$$

$$\cdot\sum_{k=0}^{[(m-n)/2]}(\nu+2k+1)Y_{\nu+2k+1}(x)$$

$$+\int_0^x\frac{J_\nu(t)}{t}dt$$

$$-\frac{2}{\nu x}\sum_{k=0}^{[(m-n)/2]}(\nu+2k+1)J_{\nu+2k+1}(x)\Bigg)$$

$$=\Bigg(Y_{\mu+m+1}(x)\int_0^x\frac{J_\nu(t)}{t}dt$$

$$+\frac{2}{\nu x}J_{\mu+m+1}(x)$$

$$\cdot\sum_{k=0}^{[(m-n-1)/2]}(\nu+2k+1)Y_{\nu+2k+1}(x)$$

$$-\frac{2}{\nu x}Y_{\mu+m+1}(x)$$

$$\cdot\sum_{k=0}^{[(m-n-1)/2]}(\nu+2k+1)J_{\nu+2k+1}(x)\Bigg)$$

$$\Bigg/\left(Y_{\mu+m+1}(x)\int_0^x\frac{J_\nu(t)}{t}dt\right) \qquad (18)$$

ここで，Lommel 多項式[3] $R_{m,\nu}(x)$ $(=(\pi x/2)\cdot\{J_{\nu+m}(x)Y_{\nu-1}(x)-Y_{\nu+m}(x)J_{\nu-1}(x)\})$ を用いれば，

$$\Psi_{\mu,m,n}(x)$$

$$=\Bigg(Y_{\mu+m+1}(x)\int_0^x\frac{J_\nu(t)}{t}dt$$

$$+\frac{4}{\nu\pi x^2}\sum_{k=0}^{[(m-n-1)/2]}(\nu+2k+1)$$

$$\cdot R_{m-n-2k-1,\nu+2k+2}(x)\Bigg)$$

$$\Bigg/\left(Y_{\mu+m+1}(x)\int_0^x\frac{J_\nu(t)}{t}dt\right) \qquad (19)$$

と表される．

上式 (19) の右辺の分子第 2 の部分を書き換えると，次式が得られる．

$$\frac{4}{\nu\pi x^2}\sum_{k=0}^{[(m-n-1)/2]}(\nu+2k+1)$$

$$\cdot R_{m-n-2k-1,\nu+2k+2}(x)$$

（Lommel 多項式を展開して）

$$=\frac{4}{\nu\pi x^2}\sum_{k=0}^{[(m-n-1)/2]}(\nu+2k+1)$$

$$\cdot\sum_{i=0}^{[(m-n-2k-1)/2]}\Bigg\{\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+n+2k+2i+1}$$

$$\cdot\frac{(-1)^i(m-n-2k-i-1)!}{i!(m-n-2k-2i-1)!}$$

$$\cdot\frac{\Gamma(\mu+m-i+1)}{\Gamma(\nu+2k+i+2)}\Bigg\}$$

（同じベキでまとめて）

$$=\frac{1}{\nu\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+n-1}$$

$$\cdot\sum_{l=0}^{[(m-n-1)/2]}\frac{(x/2)^{2l}}{(m-n-2l-1)!}$$

$$\cdot\sum_{i=0}^{l}\Bigg\{\frac{(-1)^i(\nu+2l-2i+1)}{i!}$$

$$\cdot\frac{(m-n-2l+i-1)!\Gamma(\mu+m-i+1)}{\Gamma(\nu+2l-i+2)}\Bigg\} \qquad (20)$$

次に，式 (19) の分子第 1 項については，

$$\int_0^x \frac{J_\nu(t)}{t}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{t}{2}\right)^{\nu-1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (t/2)^{2i}}{i!\Gamma(\nu+i+1)}dt$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (x/2)^{\nu+2i}}{i!(\nu+2i)\Gamma(\nu+i+1)} \qquad (21)$$

を用いれば次のようになる，

$$Y_{\mu+m+1}(x)\int_0^x \frac{J_\nu(t)}{t}dt$$

$$= \frac{1}{\sin\mu\pi}\left(\cos\mu\pi\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+m+1}\right.$$

$$\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{k!\Gamma(\mu+m+k+2)}$$

$$\left.+\left(\frac{x}{2}\right)^{-\mu-m-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{k!\Gamma(-\mu-m+k)}\right)$$

$$\cdot\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (x/2)^{\nu+2i}}{i!(\nu+2i)\Gamma(\nu+i+1)}$$

（$\sum_{k=0}^{\infty}\times\sum_{i=0}^{\infty}$ を $x/2$ のベキでまとめれば）

$$= \frac{1}{\sin\mu\pi}\left(\cos\mu\pi\left(\frac{x}{2}\right)^{2\mu+m+n+1}\right.$$

$$\cdot\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\left(\frac{x}{2}\right)^{2l}\sum_{i=0}^{l}\left\{\frac{1}{i!(l-i)!(\nu+2l-2i)}\right.$$

$$\left.\cdot\frac{1}{\Gamma(\mu+m+i+2)\Gamma(\nu+l-i+1)}\right\}$$

$$+\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+n-1}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\left(\frac{x}{2}\right)^{2l}$$

$$\cdot\sum_{i=0}^{l}\left\{\frac{1}{i!(l-i)!(\nu+2l-2i)}\right.$$

$$\left.\left.\cdot\frac{1}{\Gamma(-\mu-m+i)\Gamma(\nu+l-i+1)}\right\}\right) \qquad (22)$$

式 (20) と式 (22) を用いれば，式 (19) の分子は次のようになる，

$\Psi_{\mu,m,n}(x)$ の分子

$$= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+n-1}\sum_{l=0}^{m}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l}\left[(-1)^l\right.$$

$$\cdot\sum_{i=0}^{l}\left\{\frac{(-1)^i}{i!(l-i)!(\nu+2l-2i)}\right.$$

$$\left.\left.\cdot\frac{\Gamma(\mu+m-i+1)}{\Gamma(\nu+l-i+1)}\right\}\right]$$

$$+\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+n-1}$$

$$\cdot\sum_{l=0}^{[(m-n-1)/2]}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l}\left[\frac{1}{\nu(m-n-2l-1)!}\right.$$

$$\cdot\sum_{i=0}^{l}\left\{\frac{(-1)^i(\nu+2l-2i+1)}{i!}\right.$$

$$\left.\left.\cdot\frac{(m-n-2l+i-1)!\Gamma(\mu+m-i+1)}{\Gamma(\nu+2l-i+2)}\right\}\right]$$

$$+\frac{1}{\sin\mu\pi}\left(\cos\mu\pi\left(\frac{x}{2}\right)^{2\mu+m+n+1}\right.$$

$$\cdot\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\left(\frac{x}{2}\right)^{2l}\sum_{i=0}^{l}\left\{\frac{1}{i!(l-i)!(\nu+2l-2i)}\right.$$

$$\left.\cdot\frac{1}{\Gamma(\mu+m+i+2)\Gamma(\nu+l-i+1)}\right\}$$

$$+\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+n-1}\sum_{l=m+1}^{\infty}(-1)^l\left(\frac{x}{2}\right)^{2l}$$

$$\cdot\sum_{i=0}^{l}\left\{\frac{1}{i!(l-i)!(\nu+2l-2i)}\right.$$

$$\left.\left.\cdot\frac{1}{\Gamma(-\mu-m+i)\Gamma(\nu+l-i+1)}\right\}\right) \qquad (23)$$

上式の第 1 の部分の [ ] と第 2 の部分の [ ] は等しい（証明略）．そのため，上式の第 1 の部分の和 $\sum_{l=0}^{m}$ と第 2 の部分の $\sum_{l=0}^{[(m-n-1)/2]}$ において相殺が起こる．したがって，$\Psi_{\mu,m,n}(x)$ の分子は次式のようになる（この相殺により，$\Psi_{\mu,m,n}(x)$ の絶対値は小さくなる）．

$\Psi_{\mu,m,n}(x)$ の分子

$$= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+n-1}\sum_{l=[(m-n+1)/2]}^{m}(-1)^l\left(\frac{x}{2}\right)^{2l}$$

$$\cdot\sum_{i=0}^{l}\frac{(-1)^i\Gamma(\mu+m-i+1)}{i!(l-i)!(\nu+2l-2i)\Gamma(\nu+l-i+1)}$$

$$+\frac{1}{\sin\mu\pi}\left(\cos\mu\pi\left(\frac{x}{2}\right)^{2\mu+m+n+1}\right.$$

$$\cdot\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\left(\frac{x}{2}\right)^{2l}\sum_{i=0}^{l}\left\{\frac{1}{i!(l-i)!(\nu+2l-2i)}\right.$$

$$\left.\cdot\frac{1}{\Gamma(\mu+m+i+2)\Gamma(\nu+l-i+1)}\right\}$$

$$+\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+n-1}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\left(\frac{x}{2}\right)^{2l}$$

$$\cdot \sum_{i=0}^{m+l+1} \left\{ \frac{1}{i!(m+l-i+1)!} \cdot \frac{1}{(\nu+2m+2l-2i-2)} \cdot \frac{1}{\Gamma(-\mu-m+i)\Gamma(\nu+m+l-i+2)} \right\} \Bigg) \quad (24)$$

上式において，$m \gg x$ ならば，第1の部分の初項 $l=[(m-n+1)/2]$ が主要項であることが数値実験によって分かる．したがって，$\Psi_{\mu,m,n}(x)$ の分子は次のように近似される．ただし，n の偶奇によって異なる（以下では式 (24) の第1式において，$\sum_{i=0}^{l} = \sum_{i=0}^{\infty}$ となることを用いて変形している）．

i) n が偶数の場合 ($l=(m-n)/2$)

$$\Psi_{\mu,m,n}(x) \text{ の分子} \approx -\frac{2}{\pi x}(-1)^{(m-n)/2} \cdot \frac{\Gamma(\mu+m+1)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}-\frac{n}{2}+1\right)(\mu+m)\Gamma\left(\mu+\frac{m}{2}+\frac{n}{2}+1\right)} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{m}{2}+\frac{n}{2}\right)_i \left(-\frac{\mu}{2}-\frac{m}{2}\right)_i \left(-\mu-\frac{m}{2}-\frac{n}{2}\right)_i}{i!(-\mu-m)_i \left(1-\frac{\mu}{2}-\frac{m}{2}\right)_i} \quad (25)$$

ただし，$(\alpha)_i = \Gamma(\alpha+i)/\Gamma(\alpha)$ である．ここで，次の Saalschutz 定理[4)]

$$_3F_2(a,b,-l;d,e;1) = \frac{\Gamma(d)\Gamma(1+a-e)\Gamma(1-l-e)}{\Gamma(1-e)\Gamma(d-a)\Gamma(d-b)\Gamma(d+l)} \quad (26)$$

（ただし，l：正の整数，$d+e=1+a+b-l$） (27)

を用いれば，$\sum_{i=0}^{\infty}$ の和は単項で表される．さらに，公式 $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\pi/\sin(\pi z)$ を用いて変形すれば，$\Psi_{\mu,m,n}(x)$ の分子は次のように表される．

$$\Psi_{\mu,m,n}(x) \text{ の分子} \approx -\frac{2}{\pi x}(-1)^{(m-n)/2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{m}{2}+1\right)\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}-\frac{m}{2}+1\right)}{(\mu+m)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}-\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{-2}{\pi x(\mu+n)} \quad (28)$$

したがって，$\Psi_{\mu,m,n}(x)$ に対する評価式として次式が得られる．

$$\Psi_{\mu,m,n}(x) \approx \frac{-2}{\pi x(\mu+n) Y_{\mu+m+1}(x) \int_0^x J_\nu(x)/t\,dt} \quad (29)$$

ii) n が奇数の場合 ($l=(m-n+1)/2$)

$$\Psi_{\mu,m,n}(x) \text{ の分子} \approx -\frac{(-1)^{(m-n+1)/2}\Gamma(\mu+m+1)}{\pi\Gamma\left(\frac{m}{2}-\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\right)(\mu+m+1)} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\mu+\frac{m}{2}+\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\right)} \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \frac{\left(-\frac{m}{2}+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)_i}{i!(-\mu-m)_i} \cdot \frac{\left(-\frac{\mu}{2}-\frac{m}{2}-\frac{1}{2}\right)_i \left(-\mu-\frac{m}{2}-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)_i}{\left(-\frac{\mu}{2}-\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)_i} \right\} \quad (30)$$

上式は条件式 (27) を満たさないので，和を単項で表すための定理 (26) は適用できない．文献 1) の式 (43) においても同様で，定理 (26) によっては和が単項で表せなかった．しかし，その後の研究の過程において，次の公式[5)]

$$_3F_2(a,b,c;d+1,c+1;1) = \frac{c}{c-d}\, {}_2F_1(a,b;d+1;1) - \frac{d}{c-d}\, {}_3F_2(a,b,c;d,c+1;1) \quad (31)$$

を用いれば，以下のように，式 (30) の和は単項で表せることが分かった．

$$\Psi_{\mu,m,n}(x) \text{ の分子} \approx \frac{(-1)^{(m-n+1)/2}\Gamma(\mu+m)}{\pi\Gamma\left(\frac{m}{2}-\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{m}{2}+\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\right)} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{m}{2}+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)_i \left(-\mu-\frac{m}{2}-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)_i}{i!(-\mu-m)_i}$$
$$- \frac{2(-1)^{(m-n+1)/2}\Gamma(\mu+m)}{\pi\Gamma\left(\frac{m}{2}-\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{m}{2}+\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\right)} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \frac{\left(-\frac{m}{2}+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)_i}{i!(-\mu-m-1)_i} \cdot \frac{\left(-\mu-\frac{m}{2}-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)_i \left(-\frac{\mu}{2}-\frac{m}{2}-\frac{1}{2}\right)_i}{\left(-\frac{\mu}{2}-\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)_i} \right\} \quad (32)$$

上式の第1の部分は Gauss の定理[6)]により単項で表される．第2の部分は定理 (26) が適用できるので，単項で表される．したがって，次式が得られる．

表 1 $x = 10$, $m = 26$ に対する $\Phi_{\mu,m}(x)$, E_Φ, $\Psi_{\mu,m,n}(x)$, E_Ψ, $\Phi_{\mu,m}(x) - \Psi_{\mu,m,n}(x)$, $E_\Phi - E_\Psi$. ただし, E_Φ, E_Ψ は, それぞれ, $\Phi_{\mu,m}(x)$, $\Psi_{\mu,m,n}(x)$ の評価式の値

Table 1 $\Phi_{\mu,m}(x)$, E_Φ, $\Psi_{\mu,m,n}(x)$, E_Ψ and $E_\Phi - E_\Psi$ for $x = 10$ and $m = 26$ where E_Φ and E_Ψ are the estimation of $\Phi_{\mu,m}(x)$ and $\Psi_{\mu,m,n}(x)$ respectively.

	(a) $x = 10$, $m = 26$, $\nu = 0.2$, $\mu = 0.2$, $n = 0$	(b) $x = 10$, $m = 26$, $\nu = 6.4$, $\mu = 6.4$, $n = 0$	(c) $x = 10$, $m = 26$, $\nu = 10.7$, $\mu = 10.7$, $n = 0$
Approximation	$5.01542834140606 \cdot 10^0$	$1.84751559405664 \cdot 10^{-1}$	$2.18901575939518 \cdot 10^{-2}$
Relative error	$-9.61 \cdot 10^{-10}$	$4.17 \cdot 10^{-12}$	$5.01 \cdot 10^{-13}$
$\Phi_{\mu,m}(x)$	$1.91 \cdot 10^{-10}$	$4.18 \cdot 10^{-12}$	$5.01 \cdot 10^{-13}$
E_Φ	$1.65 \cdot 10^{-10}$	$3.81 \cdot 10^{-12}$	$4.64 \cdot 10^{-13}$
$\Psi_{\mu,m,n}(x)$	$1.15 \cdot 10^{-9}$	$1.78 \cdot 10^{-14}$	$2.23 \cdot 10^{-17}$
E_Ψ	$9.96 \cdot 10^{-10}$	$1.62 \cdot 10^{-14}$	$2.07 \cdot 10^{-17}$
$\Phi_{\mu,m}(x) - \Psi_{\mu,m,n}(x)$	$-9.61 \cdot 10^{-10}$	$4.18 \cdot 10^{-12}$	$5.01 \cdot 10^{-13}$
$E_\Phi - E_\Psi$	$-8.31 \cdot 10^{-10}$	$3.79 \cdot 10^{-12}$	$4.64 \cdot 10^{-13}$

	(d) $x = 10$, $m = 26$, $\nu = 5.2$, $\mu = 5.2$, $n = 0$	(e) $x = 10$, $m = 26$, $\nu = 5.2$, $\mu = 1.2$, $n = 4$	(f) $x = 10$, $m = 26$, $\nu = 5.2$, $\mu = 0.2$, $n = 5$
Approximation	$2.16416868189380 \cdot 10^{-1}$	$2.16416868166321 \cdot 10^{-1}$	$2.16416865254864 \cdot 10^{-1}$
Relative error	$7.91 \cdot 10^{-12}$	$-9.86 \cdot 10^{-11}$	$-1.87 \cdot 10^{-10}$
$\Phi_{\mu,m}(x)$	$8.08 \cdot 10^{-12}$	$9.52 \cdot 10^{-11}$	$1.91 \cdot 10^{-10}$
E_Φ	$7.30 \cdot 10^{-12}$	$8.32 \cdot 10^{-11}$	$1.65 \cdot 10^{-10}$
$\Psi_{\mu,m,n}(x)$	$1.71 \cdot 10^{-13}$	$1.94 \cdot 10^{-10}$	$3.78 \cdot 10^{-10}$
E_Ψ	$1.54 \cdot 10^{-13}$	$1.69 \cdot 10^{-10}$	$3.26 \cdot 10^{-10}$
$\Phi_{\mu,m}(x) - \Psi_{\mu,m,n}(x)$	$7.91 \cdot 10^{-12}$	$-9.86 \cdot 10^{-11}$	$-1.87 \cdot 10^{-10}$
$E_\Phi - E_\Psi$	$7.15 \cdot 10^{-12}$	$-8.58 \cdot 10^{-11}$	$-1.61 \cdot 10^{-10}$

$$
\begin{aligned}
&\Psi_{\mu,m,n}(x) \text{ の分子} \\
&\approx -\frac{(-1)^{(m-n+1)/2}\Gamma(\mu+m)\Gamma(-\mu-m)}{\pi\Gamma\left(\frac{m}{2}-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\left(\frac{m}{2}-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\right)} \\
&\cdot\frac{1}{\left(\frac{m}{2}-\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{m}{2}+\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\right)} \\
&\cdot\frac{1}{\Gamma\left(-\mu-\frac{m}{2}-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)} \\
&+\frac{(-1)^{(m-n+1)/2}\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\pi(\mu+m+1)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{n}{2}+1\right)} \\
&\cdot\frac{\Gamma\left(1-\left(\frac{\mu}{2}+\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)\right)}{\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}-\frac{n}{2}+1\right)}
\end{aligned}
\tag{33}
$$

ここで,

$$1/\{\Gamma(l)\Gamma(1-l)\} = 0 \quad (l: \text{整数}) \tag{34}$$

であるので, 式 (33) の第 1 の部分は零となり, $\Psi_{\mu,m,n}(x)$ の分子は次式で表される.

$$
\begin{aligned}
&\Psi_{\mu,m,n}(x) \text{ の分子} \\
&\approx \frac{-2}{\pi(\mu+n)(\mu+m+1)}
\end{aligned}
\tag{35}
$$

したがって, $\Psi_{\mu,m,n}(x)$ に対する評価式として次式が得られる.

$$
\Psi_{\mu,m,n}(x) \approx \frac{-2}{\pi(\mu+n)(\mu+m+1)Y_{\mu+m+1}(x)\int_0^x J_\nu(x)/t\,dt} \tag{36}
$$

なお, 文献 1) の場合についても, その式 (43) の和が単項で表せることを付録に示す.

5. 実験結果

以下の計算結果は富士通 GS8300/10R の倍精度計算で行ったものである. 紙面の都合により, 一例のみを示すことにする.

表 1 の (a), (b), (c) には, $x = 10$, $m = 26$, $n = 0$ に対して, $\nu = 0.2$, 6.4 および 10.7 の場合について, 式 (7) の計算値, 相対誤差, $\Phi_{\mu,m}(x)$, その評価式の値, $\Psi_{\mu,m,n}(x)$, および, その評価式の値を示す. 計算式 (7) の相対誤差は式 (15) で求められるものと同じ値になっていることが分かる. $\Phi_{\mu,m}(x)$ の評価式および $\Psi_{\mu,m,n}(x)$ の評価式の値は, それぞれ良い近似となっている. このため, $\Phi_{\mu,m}(x)$ の評価式と $\Psi_{\mu,m,n}(x)$ の評価式によって, おおよその見積りができることを例証している.

表 1 の (d), (e), (f) には, $x = 10$, $m = 26$, $\nu = 5.2$ に対して, n の値を変化させたものを示す. $\Psi_{\mu,m,n}(x)$ の評価式は, n の偶奇によって異なるが, (e), (f) は, どちらの場合でも同じ程度であることを示している.

表 2 $x = 10$, $\nu = 8.7$ に対する $\Phi_{\mu,m}(x)$, E_Φ, $\Psi_{\mu,m,n}(x)$, E_Ψ, $\Phi_{\mu,m}(x) - \Psi_{\mu,m,n}(x)$, $E_\Phi - E_\Psi$. ただし, E_Φ, E_Ψ は, それぞれ, $\Phi_{\mu,m}(x)$, $\Psi_{\mu,m,n}(x)$ の評価式の値

Table 2 $\Phi_{\mu,m}(x)$, E_Φ, $\Psi_{\mu,m,n}(x)$, E_Ψ and $E_\Phi - E_\Psi$ for $x = 10$ and $\nu = 8.7$ where E_Φ and E_Ψ are the estimation of $\Phi_{\mu,m}(x)$ and $\Psi_{\mu,m,n}(x)$ respectively.

	(a) $x = 10$, $m = 24$, $\nu = 8.7$, $\mu = 8.7$, $n = 0$	(b) $x = 10$, $m = 24$, $\nu = 8.7$, $\mu = 0.7$, $n = 8$	(c) $x = 10$, $m = 20$, $\nu = 8.7$, $\mu = 8.7$, $n = 0$
Approximation	$7.92824663194145 \cdot 10^{-2}$	$7.92824576762078 \cdot 10^{-2}$	$7.92824681595783 \cdot 10^{-2}$
Relative error	$3.94 \cdot 10^{-11}$	$-1.51 \cdot 10^{-8}$	$2.32 \cdot 10^{-8}$
$\Phi_{\mu,m}(x)$	$3.94 \cdot 10^{-11}$	$3.85 \cdot 10^{-9}$	$2.33 \cdot 10^{-8}$
E_Φ	$3.59 \cdot 10^{-11}$	$3.26 \cdot 10^{-9}$	$2.05 \cdot 10^{-8}$
$\Psi_{\mu,m,n}(x)$	$1.74 \cdot 10^{-14}$	$1.90 \cdot 10^{-8}$	$2.42 \cdot 10^{-11}$
E_Ψ	$1.58 \cdot 10^{-14}$	$1.61 \cdot 10^{-8}$	$2.14 \cdot 10^{-11}$
$\Phi_{\mu,m}(x) - \Psi_{\mu,m,n}(x)$	$3.94 \cdot 10^{-11}$	$-1.51 \cdot 10^{-8}$	$2.32 \cdot 10^{-8}$
$E_\Phi - E_\Psi$	$3.59 \cdot 10^{-11}$	$-1.65 \cdot 10^{-8}$	$2.05 \cdot 10^{-8}$

表 2 には, $x = 10$, $\nu = 8.7$ に対して, $n = 0$ および 8 の場合についての計算結果を示す. (a) と (b) を比べると, (b) の方が 3 桁ほど相対誤差の絶対値が大きい. (c) のように, $n = 0$ と選べば, m を 4 減じて $m = 20$ としても, (b) と同程度の精度で求められる. 言い換えれば, ν が大きい場合, ある与えられた要求精度を満たすためには, n を $n = [\nu]$ とするより, $n = 0$ とする方が m が小さくて済む. したがって, そのときは, $n = 0$ と選ぶ方が能率的である (このことについては文献 1) の「5. 近似式の精度」を参照).

なお, 実際の計算については, 文献 1) の「6. 計算法」と同様にして行うことができるが, 紙面の都合により省略する.

6. おわりに

漸化式を用いる $\int_0^x J_\nu(t)/t\,dt$ の計算法の誤差解析を行い, 誤差の表示式および有用な誤差の評価式を得ることができた. 本計算法は, 被積分関数 $J_\nu(t)/t$ を数値積分するものと比べて圧倒的に効率が良いという特長を持つ.

参考文献

1) 吉田年雄：漸化式を用いるベッセル関数の積分 $\int_0^x J_\nu(t)dt$ の数値計算法の誤差解析, 情報処理学会論文誌, Vol.35, No.5, pp.917–925 (1994).
2) Abramowiz, M. and Stegun, I.A.: Handbook of Mathematical Functions, p.480, Dover, New York (1968).
3) 森口繁一, 宇田川銈久, 一松 信：数学公式 III, p.225, 岩波書店, 東京 (1968).
4) Slater, L.J: Generalized Hypergeometric Functions, p.49, Cambridege University Press (1966).
5) Luke, Y.L: Mathematical Functions and their Approximations, p.165, Academic Press Inc., New York (1975).
6) 犬井鉄郎：特殊関数, p.165, 岩波書店, 東京 (1976).

付録 文献 1) の式 (43) の変形

文献 1) の p.922 において, ii) n が奇数のとき ($l = (m - n + 1)/2$), 以下のように変形できる.

$\Psi_{\mu,m,n}(x)$ の分子

$$\approx -\frac{x}{\pi}(-1)^{(m-n+1)/2}\sum_{i=0}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^i}{i!(\mu+m+2-2i)}\cdot\frac{\Gamma(\mu+m+1-i)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}-\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{m}{2}+\frac{n}{2}+\frac{3}{2}+i\right)}\right\}$$

$$= -\frac{(-1)^{(m-n+1)/2}x\Gamma(\mu+m+1)}{\pi(\mu+m+2)\Gamma\left(\frac{m}{2}-\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\right)}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\mu+\frac{m}{2}+\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\right)}\sum_{i=0}^{\infty}\left\{\frac{\left(-\frac{m}{2}+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)_i}{i!(-\mu-m)_i}\cdot\frac{\left(-\mu-\frac{m}{2}-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)_i\left(-\frac{\mu}{2}-\frac{m}{2}-1\right)_i}{\left(-\frac{\mu}{2}-\frac{m}{2}\right)_i}\right\}$$

式 (31) を用いて上式を 2 つの部分に分けると, 本文の式 (32) と同様に, 第 1 の部分に式 (34) が適用できるので, 零となる. そのため, $\Psi_{\mu,m,n}(x)$ の分子は残りの第 2 の部分のみとなり, 次のようになる.

$\Psi_{\mu,m,n}(x)$ の分子

$$\approx \frac{(-1)^{(m-n+1)/2}x(-\mu-m-1)}{\pi\left(\frac{\mu}{2}+\frac{m}{2}\right)}$$

$$\cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \frac{\left(-\mu - \frac{m}{2} - \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right)_i}{i!(-\mu - m - 1)_i} \cdot \frac{\left(-\frac{\mu}{2} - \frac{m}{2} - 1\right)_i \left(-\frac{m}{2} + \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right)_i}{\left(-\frac{\mu}{2} - \frac{m}{2}\right)_i} \right\}$$

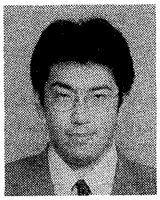
式 (25) を用いて上式を変形すれば,

$$\Psi_{\mu,m,n}(x) \text{ の分子} \approx \frac{-2x}{\pi(\mu+m)(\mu+m+2)}$$

が得られる．したがって，$\Psi_{\mu,m,n}(x)$ に対しての評価式は次のように表される．

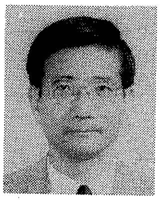
$$\Psi_{\mu,m,n}(x) \approx \frac{-2x}{\pi(\mu+m)(\mu+m+2)Y_{\mu+m+1}(x)\int_0^x J_\nu(x)/t\,dt}$$

(平成 11 年 3 月 29 日受付)
(平成 11 年 7 月 1 日採録)



山本　徹志（正会員）

昭和 49 年愛知県生．平成 9 年中部大学経営情報学部経営情報学科卒業．同年中部大学大学院経営情報学研究科修士課程（経営情報学専攻）入学．平成 11 年同修了．同年和歌山コンピュータビジネス専門学校勤務．数値計算の研究に従事．



吉田　年雄（正会員）

昭和 19 年名古屋市生．昭和 43 年慶應義塾大学工学部電気工学科卒業．昭和 45 年名古屋大学大学院工学研究科修士課程（電子工学専攻）修了．昭和 48 年同博士課程満了．同年名古屋大学工学部助手．昭和 60 年同講師．昭和 61 年中部大学工学部助教授．昭和 63 年同経営情報学部に配置転換．平成 2 年同教授．数値解析の研究に従事．特殊関数とくにベッセル関数の数値計算法の研究，開発に興味を持っている．工学博士．電子情報通信学会，日本応用数理学会各会員．